FIZYKA PLUS

Kurs wstępny – wersja zaawansowana

Materiały dla prowadzących przygotował Piotr Stachura

Uwagi ogólne: Zadania oznaczone $(*)$ w zasadzie powinny być oczywiste i jako takie winny być omówione pobieżnie lub pominięte. Uczestnikom, którym sprawiają problemy, należy zadać je jako zadanie domowe lub delikatnie zasugerować zmianę poziomu na podstawowy.
Pożądane jest branie studentów do tablicy i nawet (delikatne) przymuszanie opierających się. Stanowcza odmowa pójścia do tablicy winna być uszanowana. Generalnie staramy się unikać "wzorów".
Przed rozpoczęciem zajęć warto zajrzeć na stronę CKE http://www.cke.edu.pl i zapoznać się z aktualnymi wymaganiami programowymi.

1. Zajęcia 1, 2

Minima programowe: Nierówności wymierne z wartością bezwzględną przekraczają już poziom rozszerzony. Wzory skróconego mnożenia do rzędu 3 wchodzą do poziomu podstawowego, ponadto już na poziomie podstawowym *uczeń posługuje się pierwiastkami dowolnych stopni.* Równania i nierówności kwadratowe – poziom podstawowy; wzory Viete'a i równania z parametrem – rozszerzony.
Cel: Podniesienie sprawności rachunkowej, przekształcanie wyrażeń, elementarne dowody, własności wartości bezwzględnej. Przybliżenie koncepcji liczb niewymiernych. Przypomnienie równania kwadratowego, wzorów Viete'a, dyskusja równania z parametrem.

1.1. **Wyrażenia algebraiczne.**

(1) Omówić: $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a-b)^2 = (a+(-b))^2$, $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$, $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3 = a^3+(-b)^3$ i dwumian Newtona. (można wykorzystać do zdefiniowania silnii i symbolu Newtona–uwaga: nie ma w szkole)
(2) $(*)$ Uprościć wyrażenie: $\frac{b-c}{b^2+bc+c^2}\frac{b^3-c^3}{b^2a-ac^2}\left(1+\frac{c}{b-c}-\frac{1+c}{c}\right):\frac{c(1+c)-b}{ac}$
(3) Wykazać, że a) $a,b \geq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, b) $a,b > 0 \Rightarrow (\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(a+b) \geq 4$
(4) Wykazać, że $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$
(5) Wykazać, że jeżeli $x+y=1$, to $x^4+y^4 \geq \frac{1}{8}$.
(6) Wykazać, że jeżeli $x^3+px+q=0$, dla $x=a,b,c$, $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq b$, to $a+b+c=0$.

1.2. **Wartość bezwzględna.**

(1) Rozwiązać nierówności: $\left|\frac{x-1}{x-3}\right| \geq 1$; $|x-1| \geq |x-3|$.
(2) Narysować wykresy funkcji $f(x) := x-|x|$, $f(x) := |x-1|-|x|$
(3) Rozwiązać nierówność: $|x+3| > |2x-1|$
(4) Wykazać, że $|x+y| \leq |x|+|y|$ $(-|x|-|y| \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq |x|+|y|$ i tak samo dla y, dodajemy stronami); wobec tego $|x-y| \leq |x-z|+|z-y|$.
(5) Rozwiązać nierówność: $\sqrt{(5x+3)^2} \geq 12$ (czyli $\sqrt{x^2} = |x|$ a nie x).

1.3. **Liczby niewymierne.**

(1) Wykazać, że nie istnieje największa liczba wymierna, której kwadrat jest nie większy niż 2?
(2) Dlaczego mamy "uwierzyć" w liczby niewymierne: a) długość odcinka jest liczbą i b) tw. Pitagorasa, zatem istnieje liczba p taka, że $p^2 = 2$.
(3) Wykazać, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, tzn. nie istnieją liczby całkowite dodatnie m, n takie, że $(\frac{m}{n})^2 = 2$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIVERSITAS VARSOVIENSIS
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

(4) To samo dla $\sqrt{3}$ i $\sqrt{6}$.
(5) Skonstruować odcinki o długości $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, itp.
(6) Czy istnieją $p, q, r \in \mathbb{Q}$ spełniające równanie: $p + q\sqrt{3} = r\sqrt{2}$.
(7) (∗) Uprościć wyrażenia: $\frac{11\sqrt{3}-4\sqrt{7}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}} - \frac{13\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{12}-\sqrt{28}}$, $\frac{26\sqrt{5}-23\sqrt{3}}{\sqrt{45}-\sqrt{27}} - \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.
(8) Wykazać, że między dwiema liczbami niewymiernymi $p < q$ istnieje liczba niewymierna.
(9) Wykazać, że między dwiema liczbami niewymiernymi $p < q$ istnieje liczba wymierna.
(10) Wykazać, że między dwiema liczbami wymiernymi $p < q$ istnieje liczba niewymierna.
(11) Wykazać, że dla $p, q \in \mathbb{Q}$ istnieją $p_1, q_1 \in \mathbb{Q}$ takie, że $(p + q\sqrt{3})(p_1 + q_1\sqrt{3}) = 1$.
(12) Wykazać, że $\sqrt{2x+3}$ jest niewymierne, jeśli x jest niewymierne.
(13) Wykazać, że $\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1$ jest niewymierne. Zapisać ułamek $\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$ w postaci $a\sqrt[3]{9} + b\sqrt[3]{3} + c$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$.
(14) Czy istnieją liczby wymierne p, q takie, że $(\sqrt[3]{3}+1)(p\sqrt[3]{3}+q) = 1$?

1.4. **Równanie kwadratowe.**

(1) (∗) Rozwiązać równania kwadratowe (bez liczenia delty!): $x^2 = 9$, $(x+2)^2 = 9$, $(x+b)^2 = c^2$, $x^2 + 2x = 8$
(2) Wyprowadzić wzory na pierwiastki równania kwadratowego i wzory Viete'a.
(3) Rozwiązać równania: $x + \sqrt{x-1} - 3 = 0$, $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.
(4) Rozwiązać równanie: $x + \sqrt{4x^2+1} = 0$. (*Uwaga:* notorycznie studentom wychodzą 2 rozwiązania; podkreślić, że równanie podniesione do kwadratu ma na ogół więcej rozwiązań niż pierwotne)
(5) Rozwiązać równania $x^2 + 2|x| - 3 = 0$, $x^2 + 5|x| + 6 = 0$, $x^2 - 5|x| + 6 = 0$. (I sposób "tradycyjny szkolny" – założenia o x i dwa równania kwadratowe z warunkiem na x; II sposób $x^2 = |x|^2$ i mamy równanie kwadratowe na $|x|$); podkreślić, że *nie są to równania kwadratowe na* x.
(6) Dla jakich $p \in \mathbb{R}$ równanie $4x^2 - px + p = 0$ ma jedno rozwiązanie? Znaleźć rozwiązania w tych przypadkach.
(7) Dla jakiego $p \in \mathbb{R}$ dwa różne pierwiastki równania $x^2 + 2px + p^2 - 1 = 0$ należą do przedziału $]-2, 4[$?
(8) Rozwiązać układ równań: $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 23$, $4x + 3y + 1 = 0$.
(9) Dane są dwa równania kwadratowe: $x^2 + px + q = 0$, $x^2 + mx + n = 0$ Wykazać, że jeżeli $mp = 2(n+q)$, to przynajmniej jedno z równań ma rozwiązanie.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIVERSITAS VARSOVIENSIS

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

2. Zajęcia 3

Minima programowe: Rozkład na czynniki pierwsze i NWD to poziom rozszerzony.
Cel: Zwrócenie uwagi na własności i konsekwencje dzielenia z resztą (przyda się przy wielomianach). Ćwiczenie dowodzenia.

2.1. Dzielenie z resztą.

(1) Wykazać, że jeżeli r_1 (r_2) jest resztą z dzielenia m_1 (m_2) przez n, to to reszta z dzielenia $m_1 + m_2$ i $m_1 m_2$ przez n jest taka sama jak reszta z dzielenia $r_1 + r_2$ i $r_1 r_2$ przez n.
(2) $(*)$ Jaką resztę z dzielenia przez 5 daje liczba $1234549876 + 3249748549475343$?
(3) Jaką resztę z dzielenia przez 11 daje liczba 5^{23} (np. $5^{23} = 25 \times (5^3)^7$)
(4) $(*)$ Udowodnić cechę podzielności przez 3 i 9.
(5) Jaka jest najmniejsza, dodatnia liczba postaci: $17p + 31r$, $32p + 46r$ $p, r \in \mathbb{Z}$? (np $2 \cdot 17 - 31 = 3$, $5 \cdot 17 - 2 \cdot 31 = 23$, $8 \cdot 3 - 23 = 1$; $46 - 32 = 14$, $32 - 2 \cdot 14 = 4$, $14 - 3 \cdot 4 = 2$ i mniej być nie może).
(6) Niech $m, n \in \mathbb{N}$ oraz k_0 będzie najmniejszą, dodatnią liczbą spośród liczb postaci $pm + qn$, $p, q \in \mathbb{Z}$. Wykazać, że 1) n i m dzielą się bez reszty przez k_0; (bo inaczej $n = rk_0 + k_1$, $0 < k_1 < k_0$ oraz $rp_0 n + rq_0 m = rk_0 = n - k_1$, co jest niemożliwe) oraz 2) jeżeli k_1 jest dzielnikiem n i m to k_1 jest dzielnikiem k_0. (Innymi słowy $k_0 = NWD(m, n)$)
(7) Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 1000, które przy dzieleniu prez 10 dają resztę 8, przy dzieleniu przez 15 - resztę 14, a przy dzieleniu przez 21 - resztę 20.
(8) Wykazać, że dla $n \in \mathbb{N}$ $n^3 - n$ jest podzielne przez 6. (bez indukcji)
(9) $(*)$ Rozłożyć na czynniki pierwsze: 2535, 146072, 68921.
(10) $(*)$ Znaleźć (bez algorytmu Euklidesa): $NWD(1183, 845)$, $NWD(910, 561)$.
(11) Algorytm Euklidesa dla NWD.
(12) Wykazać, że jeżeli liczba p ma następującą własność: (jeżeli p dzieli iloczyn mn, to dzieli m lub dzieli n), to p jest pierwsza. I odwrotnie, wszystkie liczby pierwsze mają tę własność.
(13) Sprawdzić, że dodawanie i mnożenie "modulo 3" w zbiorze $\{0, 1, 2\}$ mają te same własności, co dodawanie i mnożenie (innymi słowy sprawdzić aksjomaty ciała dla $\mathbb{Z}_3$, oczywiście raczej unikać tego słowa).
(14) Rozwinięcia dziesiętne. Które z ułamków dadzą się zapisać w postaci ułamka(skończonego) dziesiętnego: $\frac{33}{165}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{13}{512}$, $\frac{123}{256}$

2.2. Indukcja i rachunek zdań.

(1) Które z poniższych zdań są zdaniami w sensie logiki: a) Czy widzisz ten dom? ; b) Nie pij tej wody!; c) x jest liczbą całkowitą; d) Jeżeli x jest liczbą całkowitą, to może być mniejszy od zera i większy od -1; e) Istnieje liczba x taka, że $2 + x = 2$.
(2) Podstawowe operacje na zdaniach: zaprzeczenie, alternatywa, koniunkcja, implikacja, tabelki.
(3) Prawa de Morgana, zaprzeczenie implikacji, tautologie.
(4) $(p \vee q) \wedge r = p \wedge r \vee q \wedge r$ –"prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania" ale również $(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$.
(5) Które z poniższych zdań są tautologiami: a) $(p \wedge q) \Rightarrow q$, b) $(p \vee q) \Rightarrow q$, c) $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$, d) $(\neg(p \wedge \neg q)) \iff (\neg p \wedge q)$.
(6) Wykazać, że dla $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest równość: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
(7) Wykazać, że dla $n \in \mathbb{N}$ $n^3 - n$ jest podzielne przez 6.
(8) Wykazać, że dla $x \geq -1$ i $n \in \mathbb{N}$ $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
(9) Wykazać wzór na dwumian Newtona.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

3. Zajęcia 4

Minima programowe: Funkcja liniowa i kwadratowa to poziom podstawowy. Wzory Viete'a, równania z parametrem – poziom rozszerzony. Przesuwanie wykresu – podstawowy, pozostałe manipulacje – rozszerzony.
Cel: Przypomnienie i uporządkowanie wiadomości, biegłość rachunkowa.

3.1. **Funkcja liniowa.**

(1) Wykazać, że znajomość wartości w dwóch punktach całkowicie określa funkcję liniową.
(2) Uzasadnić, dlaczego wykres funkcji $f(x) := ax + b$ jest linią prostą.
(3) Rozwiązać układ równań: a) $2y + 3x + 1 = 0\,,\ 3y + 2x - 1 = 0$, b) $2y + 3x + 1 = 0\,,\ y + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0$, c) $2y + 3 = x\,,\ 2x - 6 = 4y$.
(4) Przedyskutować rozwiązanie układu równań w zależności od a, b, c, d, e, f: $ax + by = e, cx + dy = f$. (czyli wyznacznik dla macierzy 2×2; oczywiście nie liczymy wyznacznika ale dodajemy stronami tak, aby wyszedł warunek na istnienie rozwiązań)ie dwie grupy turystów.
(5) Miejscowości A i B są oddalone o s kilometrów. Z A do B wyruszają jednocześnie dwie grupy. Pierwsza idzie początkowo pieszo z prędkością v, druga porusza się autobusem z prędkością u. Po pewnym czasie wysiada z autobusu i kontynuuje marsz z prędkością v. Autobus zawraca, zabbiera pierwszą grupę i wiezie ją do B. Do miejscowości B obie grupy przybywają jednocześnie. Obliczyć czas podróży.

3.2. **Funkcja kwadratowa, manipulacje wykresem.**

(1) Niech $f(x) := x^2$. Narysować wykres i podać wzór funkcji $f(x+2)$, $f(x)+4$, $f(-x+2)$, $|f(x-2)-4|$.
(2) Korzystając z wykresu $f(x) := x^2$, narysować wykres $g(x) := x^2 - x + 4$.
(3) $(*)$ Podać wzór funkcji kwadratowej f spełniającej warunki: a) $f(1) = f(5) = 0$; b) $f(1) = f(5)$; c) $f(1) = 1\,,\ f(5) = 5$.
(4) Wykazać, że wykres funkcji $f(x) := ax^2 + bx + c\,,\ a \neq 0$ jest symetryczny względem prostej $x = -\frac{b}{a}$.
(5) Dla jakiego $x \in [0, 2]$ funkcja $f(x) := \frac{1}{1-x+x^2}$ przyjmuje wartość największą, a dla jakiego najmniejszą?
(6) Rolnik ma $100m$ siatki, którą zamierza ogrodzić prostokątny kawałek łąki. Działka przylega do rzeki, w ten sposób jeden z boków nie wymaga ogrodzenia. Podać wymiary ogrodzonego kawałka o największej powierzchni.

Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

4. Zajęcia 5

Minima programowe: Dzielenie wielomianu przez $(x-a)$ to poziom rozszerzony.
Cel: Rozwiązywanie równań i nierówności wyższych stopni, tw. Bezouta, jakościowy charakter wykresów funkcji wielomianowych. Pojęcie złożenia funkcji. Wyznaczanie dziedziny złożenia.

4.1. **Funkcje wielomianowe.**

(1) Wykazać, że wielomian W dzieli się przez $(x-a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(a)=0$.
(2) Sprawdzić, że -3 jest rozwiązaniem równania $x^3-x^2-8x+12=0$, znaleźć pozostałe pierwiastki tego równania, rozwiązać nierówność $x^3-x^2-8x+12\leq 0$ (czyli dzielenie wielomianu przez jednomian).
(3) Rozwiązać równanie: $2x^3-5x^2+x+2=0$ i nierówność $2x^3-5x^2+x+2\leq 0$
(4) Naszkicować wykresy funkcji x^3 , $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$, x^3-x^2 , x^3+x^2-2 , x^3+x^2.
(5) Naszkicować wykres funkcji $f(x):=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$.
(6) Czy istnieje liczba m, dla której wielomian $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ jest podzielny przez $(x-m)^2$?

4.2. **Złożenia, dziedziny.**

(1) Czy funkcje $\sqrt{x^3}$ i $(\sqrt{x})^3$ są sobie równe. A funkcje $\sqrt{x^4}$ i $(\sqrt{x})^4$?
(2) $(*)$ Wyznaczyć maksymalną dziedzinę funkcji: $f(x):=\sqrt{x-|x-3|}$, $f(x):=\frac{\sqrt{3x-6}}{\sqrt{x^2-6x+9}}$
(3) Wyznaczyć złożenie funkcji $f\cdot g$ i $g\cdot f$ dla $f(x):=\frac{x+1}{x-1}$ i $g(x):=\frac{2x+1}{x-2}$ (dziedziny f,g maksymalne, zwrócić uwagę na dziedzinę złożenia, mniejszą niż maksymalna dziedzina wzoru).
(4) Niech $g(x):=x-5$ oraz $f(x):=x^2-4$. Rozwiązać nierówność: $g(f(x))\leq f(g(x))$.
(5) Wykazać, że zbiorem wartości funkcji $f(x):=\frac{1}{x}$ jest $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; wykazać, że f jest ściśle malejąca na $]0,\infty[$; obrazem $]0,x_0]$ jest $[\frac{1}{x_0},\infty[$. Wykorzystać te wiadomości (oraz manipulacje wykresem) do naszkicowania wykresu $f(x):=\frac{1}{x}$ oraz $g(x):=\frac{2x+1}{x-6}$.
(6) Czy istnieje funkcja g taka, że $g(f(x))=x$ dla każdego x z dziedziny f i $f(g(x))=x$ dla każdego x z dziedziny g, jeżeli tak znaleźć tę funkcję; a) $(*)$ $f(x)=2x+7$, $x\in\mathbb{R}$, b) $f(x):=ax+b$, $x\in\mathbb{R}$, c) $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$, d) $f(x):=x^2$, $x\geq 0$, e) $f(x):=x^2$, $x\leq 0$, f)$(*)$ $f(x):=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, g) $f(x):=\frac{2x+1}{x-1}$, $x\neq 1$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

5. Zajęcia 6

Minima programowe: Potęgi wymierne i logarytmy pojawiają się ma poziomie podstawowym. Zamiana podstawy logarytmu to poziom rozszerzony.
Cel: Oswojenie z "naiwną" funkcją wykładniczą i logarytmiczną. (Poniżej "log" oznacza *logarytm dziesiętny*)

5.1. **Potęgi i logarytmy.**

(1) (∗) Uprościć wyrażenia: $\frac{(a^2)^7 : a^3}{a^6 a^2}$, $(\frac{1}{2}a^{0.25} + a^{0.75})^2 - a^{1.5}(1 + a^{-0.5})$, $a > 0$
(2) (∗) Zapisać w prostszej postaci: $\left(0,125^{-\frac{2}{3}} \cdot 0,25^{-2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(81^{0,5} \cdot 9^{-2}\right)^{-\frac{1}{4}}$
(3) Naszkicować wykresy funkcji: $f(x) := 2^x$, $f(x) := 2^{|x|}$, $f(x) := 2^{-x}$, $f(x) := |1 - 2^{-x}|$.(Może warto zasygnalizować odmienność wyrażenia $2^{\sqrt{2}}$ od 2^3 i zadać "prowokacyjne" pytanie "Jak właściwie obliczyć $2^{\sqrt{2}}$? ")
(4) Rozwiązać równanie: $4^{x-5} \cdot 16^{x+3} = 128$.
(5) Rozwiązać równanie: $25^x - 5^{x+1} + 5 = 5^x$.
(6) Rozwiązać równanie: $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.
(7) Rozwiązać równanie: $2^{-|x|} = \frac{1}{2}(|x + 1| + |x - 1|)$.
(8) Korzystając z definicji obliczyć: $\log_{10} \frac{1}{100}$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$, $\log_2 \frac{1}{8}$, $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 8$, $\log_8 \frac{1}{\sqrt{2}}$
(9) Wyprowadzić wzór na zamianę podstawy logarytmu: $\log_a x = \log_b x \log_a b$
(10) Naszkicować wykresy funkcji: $f(x) := 2^x$, $g(x) := \log_2 x$, $h(x) := \log_{\frac{1}{2}} x$
(11) Czy funkcje $f(x) := \log_3 x^2$ i $g(x) := 2 \log_3 x$ są równe? Naszkicować ich wykresy.
(12) Rozwiązać równania: $\log(x - 3) - \log(2 - 3x) = 1$; $\log(54 - x^2) = 3 \log x$.
(13) Rozwiązać równania: $\frac{\log(2x-5)}{x^2-8} = \frac{1}{2}$, $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$
(14) Rozwiązać nierówność $\frac{1}{\log x} + \frac{1}{1-\log x} > 1$.
(15) Rozwiązać równanie: $\sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}$.
(16) Narysować zbiór rozwiązań nierówności: $\log_x \log_y x > 0$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

6. Zajęcia 7

Minima programowe: Na poziomie podstawowym jedynie funkcje kąta ostrego. Wykresy, wzory na sumę i róznicę oraz miara łukowa to poziom rozszerzony.
Cel: Przypomnienie i uporządkowanie podstawowwych faków z geometrii płaskiej; poszerzenie wiedzy o funkcjach trygonometrycznych.

6.1. **Geometria płaska.**

(1) Tw. Talesa, trójkąty podobne.
(2) Czy istnieje wielokąt, który ma tyle boków, co przekątnych?
(3) Przekształcenia geometryczne: translacja, obrót, symetria osiowa i środkowa, jednokładność (nie w układzie współrzędnych).
(4) $(*)$ Pola: wychodząc od wzoru na pole prostokąta wyprowadzić wzory na pole trójkąta prostokątnego i dowolnego, równoległoboku, trapezu.
(5) Tw. cosinusów ($c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$); Tw. sinusów.
(6) Okrąg opisany na trójkącie, okrąg wpisany w trójkąt.
(7) Wykazać, że w trapezie równoramiennym opisanym na okręgu, wysokość prostopadła do boków równoległych jest średnią geometryczną tych boków.

6.2. **Trygonometria.**

(1) Obliczyć funkcje trygonometryczne dla kątów (w stopniach) $30, 45, 60$.
(2) $(*)$ Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $0 < \alpha < 90$ (stopni) znaleźć pozostałe funkcje trygonometryczne kąta α.
(3) Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta (okrąg jednostkowy, miara łukowa kąta, itp); wykresy $\sin, \cos, \tan, \cot$
(4) Wykresy: $\sin(x-\pi)$, $\tan(x-\pi)$, $\cos(x-\pi)$, $\cos(\frac{\pi}{2}-x)$. Omówić własności tych funkcji przy przesunięciu argumentu o $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.
(5) Wykresy i okresy $\sin(2x)$, $\tan(\frac{x}{3})$.
(6) Wyprowadzić wzory na sinus i cosinus sumy(różnicy). Korzystając z nich, wzory na tangens i cotangens sumy (różnicy).
(7) Korzystając z wzorów z poprzedniego zadania, wyprowadzić wzory na $\sin\alpha \pm \sin\beta$ oraz $\cos\alpha \pm \cos\beta$.
(8) Narysować wykresy, podać okresy $f(x) = \sin^2 x$, $f(x) := |-2\sin(-3x+1)+1| - 6$, $g(x) := \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) + 7$.
(9) $(*)$ Obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów (w stopniach) $135, 225, 315, 420$.
(10) $(*)$ Sprawdzić tożsamości: $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2(2\alpha)$; $\cos(2x)\cos x - \sin(4x)\sin x = \cos(3x)\cos(2x)$.
(11) Rozwiązać równanie: a) $\tan(2x) = \tan(x)$, b) $\sin^2(\frac{x}{2}) + 1 = 2\sin(\frac{x}{2})$.
(12) Rozwiązać nierówności: $\tan(4x-1) > \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos(2x) \geq \frac{1}{2}$.
(13) Rozwiązać równanie: $\log_{\sin x}\frac{4}{3} = -2$.
(14) Dla jakich wartości t pierwiastki równania $x^2 + \frac{x}{t} + t^2 = 0$ można przedstawić jako $x_1 = \sin\alpha$, $x_2 = \cos\alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$?
(15) Czy funkcja $\sin(x^2)$ jest okresowa?
(16) Wzór $\sin x < x < \tan x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
(17) Niech n-kąt foremny będzie wpisany w koło o promieniu r. Znaleźć stosunek pola n-kąta do kwadratu promienia oraz obwodu n-kąta do promienia; to samo dla n-kąta opisanego na kole.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIVERSITAS VARSOVIENSIS

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

7. Zajęcia 8, 9

Minima programowe: Równanie prostej, przecięcie prostych, równoległość i prostopadłość, odległość punktów, równanie okręgu – poziom podstawowy. Nierówności, odległość punktu od prostej, koło – to poziom rozszerzony.
Cel: Równanie prostej w postaci ogólnej i parametrycznej, swoboda przechodzenia od jednej do drugiej postaci, geometryczna interpretacja równania i nierówności z dwiema niewiadomymi, proste prostopadłe. Równanie okręgu, styczna, koło, stożkowe – tłumaczenie definicji geometrycznych na równania.

7.1. **Prosta.**

(1) $(*)$ Wyznaczyć równanie prostej (w postaci $y = ax + b$) przechodzącej przez 2 dane punkty $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (3, 5)$.
(2) $(*)$ Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dany punkt $P = (4, 6)$ o zadanym współczynniku kierunkowym $a = 2$.
(3) Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dany punkt $P = (-1, 1)$ i równoległej do prostej przechodzącej przez 2 punkty $P_1 = (3, 4)$, $P_2 = (5, 6)$.
(4) Napisać w postaci parametrycznej równanie prostej przechodzącej przez 2 dane punkty (np z zadania 1).
(5) Przechodzenie od postaci parametrycznej do $ax + b$ i odwrotnie: zapisz w postaci parametrycznej prostą zadaną równaniem $2y - 6x + 7 = 0$, zapisz w postaci równanie $ay + bx + c = 0$ prostą zadaną parametrycznie: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$
(6) Podać dwa opisy parametryczne prostej (z poprzedniego zadania) danej równaniem $2y - 6x + 7 = 0$.
(7) Dla jakiej wartości $m \in \mathbb{R}$ wykresy funkcji $f(x) := \frac{x}{m-4} - 1$ oraz $h(x) := -\frac{x}{3m-1} + m$ są równoległe.
(8) Znaleźć i naszkicować zbiór punktów (x, y), które spełniają warunek: a) $|2x - y| = 2|x| - y$, b) $|2x - y| > 2|x| - y$.
(9) Znaleźć i naszkicować zbiór punktów (x, y), które spełniają układ nierówności: $|y - x| \leq 1$, $|x + 3| \leq 1$.
(10) Znaleźć i naszkicować zbiór punktów (x, y), które spełniają warunek $max\{|x - 3|, |y - 1|\} \leq 2$.

7.2. **Odległość, okrąg, koło, stożkowe.**

(1) Odległość punktów na płaszczyźnie, równanie okręgu; napisać równanie okręgu o środku w punkcie $(1, -2)$ i promieniu 6.
(2) Naszkicować w układzie współrzędnych rozwiązanie nierówności: a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y \geq -1$, b) $2x^2 + 2y^2 - 2x + 4y < -1$.
(3) Proste prostopadłe: wyprowadzić warunek na m, n, aby proste dane równaniami: $y = mx$ oraz $y = nx$ były prostopadłe (wybrać dowolne punkty na każdej z prostych i napisać tw. Pitagorasa).
(4) Znaleźć odległość punktu $P = (1, -1)$ od prostej o równaniu $4y - x - 8 = 0$.
(5) Napisać równanie symetralnej odcinka AB, $A := (1, 1)$, $B = (2, 4)$.
(6) Podać równanie okręgu przechodzącego przez punkty $(7, 1)$, $(5, 6)$ i $(-2, 4)$.
(7) Znaleźć odległość prostych $y = ax + b$, $y = ax$.
(8) Obliczyć pole trójkąta utworzonego przez proste o równaniach: $y = 0$, $2y - x = 1$ i $y + 4x = 8$.
(9) Wykazać, że istnieje dokładnie 1 prosta mająca z okręgiem $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$ dokładnie 1 punkt wspólny $(0, 0)$. Podać jej równanie. Sprawdzić, że jest ona prostopadła do promienia przechodzącego przez $(0, 0)$,
(10) Podać równanie okręgu przechodzącego przez punkty $(3, 0)$, $(7, -2)$ i stycznego do osi OX.
(11) Niech $x_0 > 0$. Wykazać, że istnieje dokładnie 1 prosta o równaniu $y = ax + b$ mająca z parabolą $y = x^2$ dokładnie 1 punkt wspólny (x_0, x_0^2). Znaleźć tę prostą.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

(12) ($*$) Sprawdzić, że odległość punktu (x, x^2) od punktu $(0, \frac{1}{4})$ jest równa odległości od prostej $y = -\frac{1}{4}$.
(13) Parabola: znaleźć zbiór tych punktów (x, y), których odległość od prostej $y = 0$ jest taka sama, jak odległość od punktu $(0, p)\,, p \neq 0$.
(14) Elipsa: znaleźć zbiór tych punktów (x, y), których suma odległości od punktów $(-c, 0)$ i $(c, 0)$ jest stała.
(15) Sprawdzić, że różnica odległości punktu $(x, \frac{1}{x})$ od punktów $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ i $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ jest stała dla $x > 0$ i dla $x < 0$. Znaleźć wartość tych stałych.
(16) Hiperbola: znaleźć zbiór tych punktów (x, y), których różnica odległości od punktów $(-c, 0)$ i $(c, 0)$ jest stała.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIVERSITAS VARSOVIENSIS
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

8. Zajęcia 10

Minima programowe: Wektory w $\mathbb{R}^3$ nie pojawiają się w minimach programowych.
Cel: Operacje na wektorach, obliczanie długości, przecięcie prostych, równanie parametryczne prostej i płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$. W szkole wektory są konsekwentnie oznaczane $[a, b]$(nawias kwadratowy), nie wydaje się, aby należało tej konwencji ściśle przestrzegać.

8.1. Wektory w $\mathbb{R}^3$, iloczyn skalarny, długość wektora, iloczyn wektorowy.

(1) Dla jakich α, β wektory $\overline{a} := (5, -3, \beta)$, $\overline{b} := (\alpha + 1, 11, -4)$ są równoległe?

(2) Znaleźć punkt przecięcia prostych zadanych parametrycznie: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(3) Podać parametryczny opis płaszczyzny rozpinanej przez proste z zadnia poprzedniego i podać równanie ją opisujące. Podać równania opisujące proste z zadania poprzedniego.

(4) $(*)$ Niech $\overline{a} := (1, 2, 3)$, $\overline{b} := (0, 2, 1)$ oraz $\overline{c} := (1, 1, 1)$. Znaleźć wektor $\overline{a} - 2\overline{b} + 3\overline{c}$; obliczyć jego długość.

(5) Obliczyć długości boków trójkąta ABC dla $\overline{AB} := (1, 1, 1)$ i $\overline{AC} := (2, -1, 0)$.

(6) $(*)$ Dane są wektory $\overline{a} := (1, -2)$, $\overline{b} := (-1, 5)$. Obliczyć: $\overline{a} \cdot \overline{b}$, $(\overline{a} + \overline{b})^2$.

(7) Wykazać, że punkty $(-2, 1), (3, 4), (-5, 6)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego. Znaleźć długości boków i kąty tego trójkąta.

(8) Sprawdzić, że wektor $\overline{b}(\overline{a} \cdot \overline{c}) - \overline{c}(\overline{b} \cdot \overline{a})$ jest prostopadły do wektora $\overline{a}$.

(9) Z punktu $(1, 2, 1)$ wystawić prostą prostopadłą do płaszczyzny $x + y + 2z = 5$ (równanie prostej w postaci parametrycznej, bez iloczynu wektorowego, metodą "na piechotę")

(10) Podać opis parametryczny płaszczyzny zadanej równaniem $x + y + 2z = 5$.

(11) Znaleźć wektor prostopadły do wektorów $\overline{a} := (1, -3, 2)$, $\overline{b} = (-2, 1, -1)$. Znaleźć pole równoległoboku rozpiętego przez wektory $\overline{a}$ i $\overline{b}$.

(12) Wzór na iloczyn wektorowy, podstawowe własności (brak łączności tego działania i tożsamość Jakobiego).

(13) Znaleźć wektor prostopadły do płaszczyzny na której leżą proste l_1 i l_2 o równaniach: $l_1 = (1, 2, 0) + \lambda(2, 1, -2)$ oraz $l_2 = (3, 2, 2) + \mu(0, 1, 3)$.

(14) Powtórzyć zadanie z prostą prostopadłą do płaszczyzny $x + y + 2z = 5$ z użyciem iloczynu wektorowego.

Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

9. Zajęcia 11

Minima programowe: Obrazy podstawowych figur geometrycznych w symetrii osiowej i środkowej znajdują się na poziomie podstawowym, jednokładność wspomniana jest na poziomie rozszerzonym. Pojęcie ciągu występuje na p oziomie podstawowym, ciąg zadany rekurencyjnie na rozszerzonym.
Cel: Znajdowanie anlitycznych wyrażeń dla podstawowych operacji geometrycznych. Znajdowanie obrazów. Badanie monotoniczności ciągu.

9.1. **Przekształcenia w układzie współrzędnych.**

(1) Niech (x', y') będą współrzędnymi obrazu punktu (x, y) w przekształceniu P. Podać zależność (x', y') od (x, y) dla:
a) P – odbicie względem prostej $y = x$;
b) P – złożenie odbicia względem prostej $y = x$ z odbiciem względem prostej $y = x + 2$;
c) P – złożenie odbicia względem prostej $y = x$ z odbiciem względem prostej $y = -x$;
d) P – obrót o kąt α wokół $(0, 0)$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara;
e) P – jednokładność o środku $(1, 1)$ i skali k.

(2) Znaleźć obraz prostej $2y + 3x + 1 = 0$ w odbiciu względem prostej $x + y = 0$.

(3) Znaleźć obraz paraboli $y = x^2$ w odbiciu względem prostej a) $y = x$, b) $y = 2x + 2$.

(4) Znaleźć obraz hiperboli $yx = 1$ w obrocie wokół $(0, 0)$ o kąt $\frac{\pi}{4}$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

(5) Naszkicować zbiór punktów (x, y) spełniających równanie: a) $x^2 + y^2 = -4x - 6y + 12$, b) $4x^2 = xy$, c) $y^2 - 4y = 2 - 6x$.

(6) Znaleźć obraz krzywej o równaniu $x^2 - 2xy + y^2 - 12x - 12y = -36$ po obrocie o kąt $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$ wokół $(0, 0)$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówk zegara.

9.2. **Ciągi.**

(1) Ciąg o wyrazach rzeczywistych=funkcja, której dziedziną jest $\mathbb{N}$.

(2) Zbadać, które z podanych ciągów są monotoniczne (być może począwszy od pewnego wyrazu): a) $a_n := \frac{n+7}{2n-9}$; b) $b_n := \frac{3-2n}{5n+6}$; c) $c_n := \frac{1}{2n^2+3n-3}$; d) $d_n := (-1)^n \frac{n+3}{3n+4}$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

10. Zajęcia 12

Minima programowe: Ciągi arytmetyczny i geometryczny wraz ze wzorami na sumę pojawiają się na poziomie podstawowym.
Cel: Rozpoznawanie ciągu arytmetycznego i geometrycznego, stosowanie wzorów na sumę.

10.1. **Ciąg arytmetyczny.**

(1) $(*)$ Obliczyć n-ty wyraz ciągu arytmetycznego zadanego przez a_1 i r: a) $a_1 = 5$, $r = -2$, $n = 11$; b) $a_1 = -12$, $r = 2$, $n = 7$.
(2) $(*)$ Który z podanych ciągów jest arytmetyczny: $a_n := \frac{1}{3}(4n-1)$, $b_n := \frac{n+2}{2n+1}$, $c_n := \log_{10}(2^{\frac{n}{2}})$.
(3) Niech $a_n := n^2$, wykazać, że ciąg $b_n := a_{n+1} - a_n$ jest ciągiem arytmetycznym.
(4) Znaleźć parametry a_1, r ciągu arytmetycznego jeżeli różnica między wyrazem 8-mym a 3-cim wynosi 100, a suma wyrazu 4-tego i 7-ego wynosi 24.
(5) Znaleźć parametry a_1, r ciągu arytmetycznego jeżeli $a_3 + a_5 = 10$ oraz $a_6 + a_8 = 10$.
(6) Wzór na sumę ciągu arytmetycznego.
(7) $(*)$ Znaleźć sumę wszystkich liczb nieparzystych większych od 10 i mniejszych od 1200.
(8) Ciąg arytmetyczny składa się z 20 wyrazów. Suma wyrazów parzystych wynosi 250, a nieparzystych 220. Znaleźć wyrazy a_9 i a_{10}.
(9) Niech liczby $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ tworzą ciąg arytmetyczny. Wykazać, że:

$$a_1 - \binom{n}{1} a_2 + \binom{n}{2} a_3 + \cdots + (-1)^k \binom{n}{k} a_{k+1} + \cdots + (-1)^n a_{n+1} = 0$$

10.2. **Ciąg geometryczny.**

(1) $(*)$ O ile procent wzrośnie wartość lokaty bankowej 5% (z kapitalizacją roczną) w ciągu 3 lat.
(2) Jaka jest wartość po upływie roku lokaty bankowej o rocznej stopie procentowej r% z kapitalizacją kwartalną, miesięczną, dzienną, godzinową ?
(3) Suma ciągu geometrycznego: wzór $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) = 1 - x^{n+1}$
(4) Ciąg (a, b, c) jest jednocześnie arytmetyczny i geometryczny. Jakie zależności zachodzą między a, b i c ?
(5) Znaleźć $32 < x < y < 500$ takie, by ciąg $(32, x, y, 500)$ był ciągiem: a) arytmetycznym, b) geometrycznym.
(6) W rosnącym ciągu geometrycznym suma $2n$ początkowych wyrazów wynosi 63 a suma $3n$ początkowych wyrazów 511. Obliczyć sumę n początkowych wyrazów.
(7) Niech $q > 1$. Wykazać, że dla dowolnej liczby M istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $q^n \geq M$ dla wszystkich $n \geq n_0$ (wykorzystać nier. Bernoulliego); korzystając z tego wykazać, że jeżeli $|q| < 1$ to dla dowolnej liczby $M > 0$ istnieje n_0 takie, że $|q|^n \leq M$ dla $n \geq n_0$.
(8) W jakim sensie $\frac{1}{3} = 0.(3)$? (korzystając z wzoru na sumę ciągu geometrycznego i zadania powyżej; raczej "machając rękami" niż formalnie licząc granicę)
(9) Powtórzyć rachunek dla $\frac{2}{13}$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.