Kurs wstępny – wersja podstawowa
Materiały dla prowadzących przygotował Piotr Stachura

Uwagi ogólne: Zadania oznaczone $(*)$ mogą być pominięte/omówione pobieżnie/zostawione na koniec w zależności od czasu/poziomu grupy/widzimisię prowadzącego.
Pożądane jest branie studentów do tablicy i nawet (delikatne) przymuszanie opierających się. Stanowcza odmowa pójścia do tablicy winna być uszanowana. Generalnie staramy się unikać "wzorów".
Przed rozpoczęciem zajęć warto zajrzeć na stronę CKE http://www.cke.edu.pl i zapoznać się z aktualnymi wymaganiami programowymi.

1. Zajęcia 1, 2

Minima programowe: Nierówności wymierne z wartością bezwzględną przekraczają już poziom rozszerzony. Wzory skróconego mnożenia do rzędu 3 wchodzą do poziomu podstawowego, ponadto już na poziomie podstawowym *uczeń posługuje się pierwiastkami dowolnych stopni.* Równania i nierówności kwadratowe – poziom podstawowy; wzory Viete'a i równania z parametrem – rozszerzony.
Cel: Podniesienie sprawności rachunkowej, przekształcanie wyrażeń, elementarne dowody, własności wartości bezwzględnej. Przybliżenie koncepcji liczb niewymiernych. Przypomnienie równania kwadratowego, wzorów Viete'a, dyskusja równania z parametrem.

1.1. Wyrażenia algebraiczne.

(1) Omówić: $(a+b)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, $(a-b)^2 = (a+(-b))^2$, $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$, $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3 = a^3+(-b)^3$ i dwumian Newtona. (można wykorzystać do zdefiniowania silnii i symbolu Newtona–uwaga: nie ma w szkole)
(2) Uprościć wyrażenie: $\frac{b-c}{b^2+bc+c^2}\frac{b^3-c^3}{b^2a-ac^2}\left(1+\frac{c}{b-c}-\frac{1+c}{c}\right):\frac{c(1+c)-b}{ac}$
(3) Wykazać, że a) $a,b\geq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, b) $a,b>0 \Rightarrow (\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(a+b)\geq 4$
(4) Wykazać, że $a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$
(5) $(*)$ Wykazać, że jeżeli $x+y=1$, to $x^4+y^4\geq\frac{1}{8}$.
(6) $(*)$ Wykazać, że jeżeli $x^3+px+q=0$, dla $x=a,b,c$, $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq b$, to $a+b+c=0$.

1.2. Wartość bezwzględna.

(1) "Wartość bezwzględna=odległość od 0."
(2) Rozwiązać nierówności: $\left|\frac{x-1}{x-3}\right|\geq 1$; $|x-1|\geq|x-3|$.
(3) Narysować wykresy funkcji $f(x):=x-|x|$, $f(x):=|x-1|-|x|$
(4) Rozwiązać nierówność: $|x+3|>|2x-1|$
(5) Wykazać, że $|x+y|\leq|x|+|y|$ $(-|x|-|y|\leq-|x|\leq x\leq|x|\leq|x|+|y|$ i tak samo dla y, dodajemy stronami); wobec tego $|x-y|\leq|x-z|+|z-y|$.
(6) Rozwiązać nierówność: $\sqrt{(5x+3)^2}\geq 12$ (czyli $\sqrt{x^2}=|x|$ a nie x).

1.3. Liczby niewymierne.

(1) Wykazać, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, tzn. nie istnieją liczby całkowite dodatnie m,n takie, że $(\frac{m}{n})^2=2$.
(2) (*) Wykazać, że nie istnieje największa liczba wymierna, której kwadrat jest nie większy niż 2.
(3) Dlaczego mamy "uwierzyć" w liczby niewymierne: a) długość odcinka jest liczbą i b) tw. Pitagorasa, zatem istnieje liczba p taka, że $p^2=2$.

KAPITAŁ LUDZKI NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

(4) (∗) Wykazać, że $\sqrt{3}$ i $\sqrt{6}$ są niewymierne.
(5) Porównać liczby $2\sqrt{5}+\sqrt{21}$ oraz 9.
(6) Skonstruować odcinki o długości $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, itp.
(7) Czy istnieją $p,q,r\in\mathbb{Q}$ spełniające równanie: $p+q\sqrt{3}=r\sqrt{2}$.
(8) Uprościć wyrażenia: $\frac{11\sqrt{3}-4\sqrt{7}}{\sqrt{3}-\sqrt{7}}-\frac{13\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{12}-\sqrt{28}}$, $\frac{26\sqrt{5}-23\sqrt{3}}{\sqrt{45}-\sqrt{27}}-\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.
(9) Wykazać, że między dwiema liczbami niewymiernymi $p<q$ istnieje liczba niewymierna.
(10) Wykazać, że między dwiema liczbami niewymiernymi $p<q$ istnieje liczba wymierna.
(11) Wykazać, że między dwiema liczbami wymiernymi $p<q$ istnieje liczba niewymierna.
(12) Wykazać, że dla $p,q\in\mathbb{Q}$ istnieją $p_1,q_1\in\mathbb{Q}$ takie, że $(p+q\sqrt{3})(p_1+q_1\sqrt{3})=1$.
(13) Wykazać, że $\sqrt{2x+3}$ jest niewymierne, jeśli x jest niewymierne.
(14) (∗) Wykazać, że $\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1$ jest niewymierne. Zapisać ułamek $\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$ w postaci $a\sqrt[3]{9}+b\sqrt[3]{3}+c$, $a,b,c\in\mathbb{Q}$.

1.4. **Równanie kwadratowe.**

(1) Rozwiązać równania kwadratowe (bez liczenia delty!): $x^2=9$, $(x+2)^2=9$, $(x+b)^2=c^2$, $x^2+2x=8$; następnie wyprowadzić wzory na pierwiastki równania kwadratowego i wzory Viete'a.
(2) Rozwiązać równania: $x+\sqrt{x-1}-3=0$, $x^4-10x^2+9=0$.
(3) Rozwiązać równanie: $x+\sqrt{4x^2+1}=0$. (*Uwaga:* notorycznie studentom wychodzą 2 rozwiązania; podkreślić, że równanie podniesione do kwadratu ma na ogół więcej rozwiązań niż pierwotne)
(4) Rozwiązać równania $x^2+2|x|-3=0$, $x^2+5|x|+6=0$, $x^2-5|x|+6=0$. (I sposób "tradycyjny szkolny" – założenia o x i dwa równania kwadratowe z warunkiem na x; II sposób $x^2=|x|^2$ i mamy równanie kwadratowe na $|x|$); podkreślić, że *nie są to równania kwadratowe na* x.
(5) Dla jakich $p\in\mathbb{R}$ równanie $4x^2-px+p=0$ ma jedno rozwiązanie? Znaleźć rozwiązania w tych przypadkach.
(6) Dla jakiego $p\in\mathbb{R}$ dwa różne pierwiastki równania $x^2+2px+p^2-1=0$ należą do przedziału $]-2,4[$?
(7) Rozwiązać układ równań: $x^2+y^2+2x-2y=23$, $4x+3y+1=0$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIVERSITAS VARSOVIENSIS
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

2. Zajęcia 3

Minima programowe: Rozkład na czynniki pierwsze i NWD to poziom rozszerzony.
Cel: Zwrócenie uwagi na własności i konsekwencje dzielenia z resztą (przyda się przy wielomianach). Ćwiczenie dowodzenia. (∗) Omówienie zasady dowodów indukcyjnych.

2.1. Dzielenie z resztą.

(1) Jaką resztę z dzielenia przez 5 daje liczba 1234549876 + 3249748549475343 ?
(2) Wykazać, że jeżeli r_1 (r_2) jest resztą z dzielenia m_1 (m_2) przez n, to to reszta z dzielenia $m_1 + m_2$ i $m_1 m_2$ przez n jest taka sama jak reszta z dzielenia $r_1 + r_2$ i $r_1 r_2$ przez n.
(3) Jaką resztę z dzielenia przez 11 daje liczba 5^{23} (np. $5^{23} = 25 \times (5^3)^7$)
(4) Udowodnić cechę podzielności przez 3 i 9.
(5) Jaka jest najmniejsza, dodatnia liczba postaci: $17p + 31r$, $32p + 46r$ $p, r \in \mathbb{Z}$? (np $2 \cdot 17 - 31 = 3$, $5 \cdot 17 - 2 \cdot 31 = 23$, $8 \cdot 3 - 23 = 1$; $46 - 32 = 14$, $32 - 2 \cdot 14 = 4$, $14 - 3 \cdot 4 = 2$ i mniej być nie może).
(6) (∗) Niech $m, n \in \mathbb{N}$ oraz k_0 będzie najmniejszą, dodatnią liczbą spośród liczb postaci $pm + qn$, $p, q \in \mathbb{Z}$. Wykazać, że 1) n i m dzielą się bez reszty przez k_0; (bo inaczej $n = rk_0 + k_1$, $0 < k_1 < k_0$ oraz $rp_0 n + rq_0 m = rk_0 = n - k_1$, co jest niemożliwe) oraz 2) jeżeli k_1 jest dzielnikiem n i m to k_1 jest dzielnikiem k_0. (Innymi słowy $k_0 = NWD(m, n)$)
(7) Ile jest liczb naturalnych mniejszych od 1000, które przy dzieleniu prez 10 dają resztę 8, przy dzieleniu przez 15 - resztę 14, a przy dzieleniu przez 21 - resztę 20.
(8) Wykazać, że dla $n \in \mathbb{N}$ $n^3 - n$ jest podzielne przez 6. (bez indukcji)
(9) Rozłożyć na czynniki pierwsze: 2535, 146072, 68921.
(10) Znaleźć (bez algorytmu Euklidesa): $NWD(1183, 845)$, $NWD(910, 561)$.
(11) (∗) Wykazać, że jeżeli liczba p ma następującą własność: (jeżeli p dzieli iloczyn mn, to dzieli m lub dzieli n), to p jest pierwsza. I odwrotnie, wszystkie liczby pierwsze mają tę własność.
(12) Rozwinięcia dziesiętne. Które z ułamków dadzą się zapisać w postaci ułamka(skończonego) dziesiętnego: $\frac{33}{165}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{13}{512}$, $\frac{123}{256}$

2.2. Indukcja i rachunek zdań. (∗)

(1) Które z poniższych zdań są zdaniami w sensie logiki: a) Czy widzisz ten dom? ; b) Nie pij tej wody!; c) x jest liczbą całkowitą; d) Jeżeli x jest liczbą całkowitą, to może być mniejszy od zera i większy od -1; e) Istnieje liczba x taka, że $2 + x = 2$.
(2) Podstawowe operacje na zdaniach: zaprzeczenie, alternatywa, koniunkcja, implikacja, tabelki.
(3) Prawa de Morgana, zaprzeczenie implikacji, tautologie.
(4) $(p \vee q) \wedge r = p \wedge r \vee q \wedge r$ –"prawo rozdzielności mnożenia względem dodawania" ale również $(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$.
(5) Które z poniższych zdań są tautologiami: a) $(p \wedge q) \Rightarrow q$, b) $(p \vee q) \Rightarrow q$, c) $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$, d) $(\neg(p \wedge \neg q)) \iff (\neg p \wedge q)$.
(6) Wykazać, że dla $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest równość: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
(7) Wykazać, że dla $n \in \mathbb{N}$ $n^3 - n$ jest podzielne przez 6.
(8) Wykazać, że dla $x \geq -1$ i $n \in \mathbb{N}$ $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
(9) Wykazać wzór na dwumian Newtona.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIVERSITAS VARSOVIENSIS
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

3. Zajęcia 4

Minima programowe: Funkcja liniowa i kwadratowa to poziom podstawowy. Wzory Viete'a, równania z parametrem – poziom rozszerzony. Przesuwanie wykresu – podstawowy, pozostałe manipulacje – rozszerzony.
Cel: Przypomnienie i uporządkowanie wiadomości, biegłość rachunkowa.

3.1. **Funkcja liniowa.**

(1) Wykazać, że znajomość wartości w dwóch punktach całkowicie określa funkcję liniową.
(2) Uzasadnić, dlaczego wykres funkcji $f(x) := ax + b$ jest linią prostą.
(3) Rozwiązać układy równań: a) $2y + 3x + 1 = 0$, $3y + 2x - 1 = 0$, b) $2y + 3x + 1 = 0$, $y + \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0$, c) $2y + 3 = x$, $2x - 6 = 4y$.
(4) ($*$) Przedyskutować rozwiązanie układu równań w zależności od a, b, c, d, e, f: $ax+by = e, cx+dy = f$. (czyli wyznacznik dla macierzy 2×2; oczywiście nie liczymy wyznacznika ale dodajemy stronami tak, aby wyszedł warunek na istnienie rozwiązań)
(5) Suma cyfr liczby dwucyfrowej wynosi 11. Po zamianie cyfr otrzymujemy liczbę o 27 większą. Znaleźć tę liczbę.

3.2. **Funkcja kwadratowa, manipulacje wykresem.**

(1) Niech $f(x) := x^2$. Narysować wykres i podać wzór funkcji $f(x+2)$, $f(x)+4$, $f(-x+2)$, $|f(x-2)-4|$.
(2) Korzystając z wykresu $f(x) := x^2$, narysować wykres $g(x) := x^2 - x + 4$.
(3) Podać wzór funkcji kwadratowej f spełniającej warunki: a) $f(1) = f(5) = 0$; b) $f(1) = f(5)$; c) $f(1) = 1$, $f(5) = 5$.
(4) Wykazać, że wykres funkcji $f(x) := ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ jest symetryczny względem prostej $x = -\frac{b}{a}$.
(5) Dla jakiego $x \in [0, 2]$ funkcja $f(x) := \frac{1}{1-x+x^2}$ przyjmuje wartość największą, a dla jakiego najmniejszą?
(6) Rolnik ma $100m$ siatki, którą zamierza ogrodzić prostokątny kawałek łąki. Działka przylega do rzeki, w ten sposób jeden z boków nie wymaga ogrodzenia. Podać wymiary ogrodzonego kawałka o największej powierzchni.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

4. Zajęcia 5

Minima programowe: Dzielenie wielomianu przez $(x-a)$ to poziom rozszerzony.
Cel: Rozwiązywanie równań i nierówności wyższych stopni, tw. Bezouta, jakościowy charakter wykresów funkcji wielomianowych. Pojęcie złożenia funkcji. Wyznaczanie dziedziny złożenia.

4.1. **Funkcje wielomianowe.**

(1) Wykazać, że wielomian W dzieli się przez $(x-a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(a)=0$.
(2) Sprawdzić, że -3 jest rozwiązaniem równania $x^3-x^2-8x+12=0$, znaleźć pozostałe pierwiastki tego równania, rozwiązać nierówność $x^3-x^2-8x+12\leq 0$ (czyli dzielenie wielomianu przez jednomian).
(3) Rozwiązać równanie: $2x^3-5x^2+x+2=0$ i nierówność $2x^3-5x^2+x+2\leq 0$
(4) Naszkicować wykresy funkcji x^3 , $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$, x^3-x^2 , x^3+x^2-2 , x^3+x^2.
(5) Naszkicować wykres funkcji $f(x):=(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$.
(6) Czy istnieje liczba m, dla której wielomian $1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ jest podzielny przez $(x-m)^2$?

4.2. **Złożenia, dziedziny.**

(1) Czy funkcje $\sqrt{x^3}$ i $(\sqrt{x})^3$ są sobie równe. A funkcje $\sqrt{x^4}$ i $(\sqrt{x})^4$?
(2) Wyznaczyć maksymalną dziedzinę funkcji: $f(x):=\sqrt{x-|x-3|}$, $f(x):=\frac{\sqrt{3x-6}}{\sqrt{x^2-6x+9}}$
(3) Wyznaczyć złożenie funkcji $f\cdot g$ i $g\cdot f$ dla $f(x):=\frac{x+1}{x-1}$ i $g(x):=\frac{2x+1}{x-2}$ (dziedziny f,g maksymalne, zwrócić uwagę na dziedzinę złożenia, mniejszą niż maksymalna dziedzina wzoru).
(4) Niech $g(x):=x-5$ oraz $f(x):=x^2-4$. Rozwiązać nierówność: $g(f(x))\leq f(g(x))$.
(5) Wykazać, że zbiorem wartości funkcji $f(x):=\frac{1}{x}$ jest $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; wykazać, że f jest ściśle malejąca na $]0,\infty[$; obrazem $]0,x_0]$ jest $[\frac{1}{x_0},\infty[$. Wykorzystać te wiadomości (oraz manipulacje wykresem) do naszkicowania wykresu $f(x):=\frac{1}{x}$ oraz $g(x):=\frac{2x+1}{x-6}$.
(6) $(*)$ Czy istnieje funkcja g taka, że $g(f(x))=x$ dla każdego x z dziedziny f i $f(g(x))=x$ dla każdego x z dziedziny g, jeżeli tak znaleźć tę funkcję; a) $f(x)=2x+7$, $x\in\mathbb{R}$, b) $f(x):=ax+b$, $x\in\mathbb{R}$, c) $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$, d) $f(x):=x^2$, $x\geq 0$, e) $f(x):=x^2$, $x\leq 0$, f) $f(x):=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$, g) $f(x):=\frac{2x+1}{x-1}$, $x\neq 1$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIVERSITAS VARSOVIENSIS
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

FIZYKA PLUS

5. Zajęcia 6

Minima programowe: Potęgi wymierne i logarytmy pojawiają się ma poziomie podstawowym. Zamiana podstawy logarytmu to poziom rozszerzony.
Cel: Oswojenie z "naiwną" funkcją wykładniczą i logarytmiczną. (Poniżej "log" oznacza *logarytm dziesiętny*)

5.1. **Potęgi i logarytmy.**

(1) Uprościć wyrażenia: $\frac{(a^2)^7 : a^3}{a^6 a^2}$, $(\frac{1}{2}a^{0.25} + a^{0.75})^2 - a^{1.5}(1 + a^{-0.5})$, $a > 0$
(2) Zapisać w prostszej postaci: $\left(0,125^{-\frac{2}{3}} \cdot 0,25^{-2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(81^{0,5} \cdot 9^{-2}\right)^{-\frac{1}{4}}$
(3) Naszkicować wykresy funkcji: $f(x) := 2^x$, $f(x) := 2^{|x|}$, $f(x) := 2^{-x}$, $f(x) := |1 - 2^{-x}|$.(Może warto zasygnalizować odmienność wyrażenia $2^{\sqrt{2}}$ od 2^3 i zadać "prowokacyjne" pytanie "Jak właściwie obliczyć $2^{\sqrt{2}}$? ")
(4) Rozwiązać równanie: $4^{x-5} \cdot 16^{x+3} = 128$.
(5) Rozwiązać równanie: $25^x - 5^{x+1} + 5 = 5^x$.
(6) Rozwiązać równanie: $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.
(7) Korzystając z definicji obliczyć: $\log_{10} \frac{1}{100}$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$, $\log_2 \frac{1}{8}$, $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 8$, $\log_8 \frac{1}{\sqrt{2}}$
(8) Wyprowadzić wzór na zamianę podstawy logarytmu: $\log_a x = \log_b x \log_a b$
(9) Naszkicować wykresy funkcji: $f(x) := 2^x$, $g(x) := \log_2 x$, $h(x) := \log_{\frac{1}{2}} x$
(10) Czy funkcje $f(x) := \log_3 x^2$ i $g(x) := 2\log_3 x$ są równe? Naszkicować ich wykresy.
(11) Rozwiązać równania: $\log(x - 3) - \log(2 - 3x) = 1$; $\log(54 - x^2) = 3\log x$.
(12) Rozwiązać równania: $\frac{\log(2x-5)}{x^2-8} = \frac{1}{2}$, $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$
(13) Rozwiązać nierówność $\frac{1}{\log x} + \frac{1}{1-\log x} > 1$.
(14) Rozwiązać równanie: $\sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}$.
(15) (∗) Narysować zbiór rozwiązań nierówności: $\log_x \log_y x > 0$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIVERSITAS VARSOVIENSIS

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

6. Zajęcia 7

Minima programowe: Na poziomie podstawowym jedynie funkcje kąta ostrego. Wykresy, wzory na sumę i różnicę oraz miara łukowa to poziom rozszerzony.
Cel: Przypomnienie i uporządkowanie podstawowych faktów z geometrii płaskiej; poszerzenie wiedzy o funkcjach trygonometrycznych.

6.1. **Geometria płaska.**

(1) Tw. Talesa, trójkąty podobne.
(2) Czy istnieje wielokąt, który ma tyle boków, co przekątnych?
(3) Przekształcenia geometryczne: translacja, obrót, symetria osiowa i środkowa, jednokładność (nie w układzie współrzędnych).
(4) Pola: wychodząc od wzoru na pole prostokąta wyprowadzić wzory na pole trójkąta prostokątnego i dowolnego, równoległoboku, trapezu.
(5) Tw. cosinusów ($c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$); Tw. sinusów.
(6) Okrąg opisany na trójkącie, okrąg wpisany w trójkąt.
(7) Wykazać, że w trapezie równoramiennym opisanym na okręgu, wysokość prostopadła do boków równoległych jest średnią geometryczną tych boków.

6.2. **Trygonometria.**

(1) Obliczyć funkcje trygonometryczne dla kątów (w stopniach) $30, 45, 60$.
(2) Wiedząc, że $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $0 < \alpha < 90$ (stopni) znaleźć pozostałe funkcje trygonometryczne kąta α.
(3) Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta (okrąg jednostkowy, miara łukowa kąta, itp); wykresy $\sin, \cos, \tan, \cot$
(4) Wykresy: $\sin(x-\pi)$, $\tan(x-\pi)$, $\cos(x-\pi)$, $\cos(\frac{\pi}{2}-x)$. Omówić własności tych funkcji przy przesunięciu argumentu o $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$.
(5) Wykresy i okresy $\sin(2x)$, $\tan(\frac{x}{3})$.
(6) ((∗) Wyprowadzić) Podać wzory na sinus i cosinus sumy(różnicy). Korzystając z nich, wzory na tangens i cotangens sumy (różnicy).
(7) Korzystając z wzorów z poprzedniego zadania, wyprowadzić wzory na $\sin\alpha \pm \sin\beta$ oraz $\cos\alpha \pm \cos\beta$.
(8) Narysować wykresy, podać okresy $f(x) = \sin^2 x$, $f(x) := |-2\sin(-3x+1)+1| - 6$, $g(x) := \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}) + 7$.
(9) Obliczyć wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów (w stopniach) $135, 225, 315, 420$.
(10) Sprawdzić tożsamości: $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2(2\alpha)$; $\cos(2x)\cos x - \sin(4x)\sin x = \cos(3x)\cos(2x)$.
(11) Rozwiązać równanie: a) $\tan(2x) = \tan(x)$, b) $\sin^2(\frac{x}{2}) + 1 = 2\sin(\frac{x}{2})$.
(12) Rozwiązać nierówności: $\tan(4x-1) > \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos(2x) \geq \frac{1}{2}$.
(13) Rozwiązać równanie: $\log_{\sin x}\frac{4}{3} = -2$.
(14) Dla jakich wartości t pierwiastki równania $x^2 + \frac{x}{t} + t^2 = 0$ można przedstawić jako $x_1 = \sin\alpha$, $x_2 = \cos\alpha$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$?
(15) (∗) Czy funkcja $\sin(x^2)$ jest okresowa?
(16) (∗) Wzór $\sin x < x < \tan x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
(17) (∗) Niech n-kąt foremny będzie wpisany w koło o promieniu r. Znaleźć stosunek pola n-kąta do kwadratu promienia oraz obwodu n-kąta do promienia; to samo dla n-kąta opisanego na kole.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

7. Zajęcia 8, 9

Minima programowe: Równanie prostej, przecięcie prostych, równoległość i prostopadłość, odległość punktów, równanie okręgu – poziom podstawowy. Nierówności, odległość punktu od prostej, koło – to poziom rozszerzony.
Cel: Równanie prostej w postaci ogólnej i parametrycznej, swoboda przechodzenia od jednej do drugiej postaci, geometryczna interpretacja równania i nierówności z dwiema niewiadomymi, proste prostopadłe. Równanie okręgu, styczna, koło, (∗) stożkowe.

7.1. **Prosta.**

(1) Wyznaczyć równanie prostej (w postaci $y = ax + b$) przechodzącej przez 2 dane punkty $P_1 = (1, 2)$, $P_2 = (3, 5)$.
(2) Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dany punkt $P = (4, 6)$ o zadanym współczynniku kierunkowym $a = 2$.
(3) Wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dany punkt $P = (-1, 1)$ i równoległej do prostej przechodzącej przez 2 punkty $P_1 = (3, 4)$, $P_2 = (5, 6)$.
(4) Napisać w postaci parametrycznej równanie prostej przechodzącej przez 2 dane punkty (np z zadania 1).
(5) Przechodzenie od postaci parametrycznej do $ax + b$ i odwrotnie: zapisz w postaci parametrycznej prostą zadaną równaniem $2y - 6x + 7 = 0$, zapisz w postaci równanie $ay + bx + c = 0$ prostą zadaną parametrycznie: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$
(6) Podać dwa opisy parametryczne prostej (z poprzedniego zadania) danej równaniem $2y - 6x + 7 = 0$.
(7) Dla jakiej wartości $m \in \mathbb{R}$ wykresy funkcji $f(x) := \frac{x}{m-4} - 1$ oraz $h(x) := -\frac{x}{3m-1} + m$ są równoległe.
(8) Znaleźć i naszkicować zbiór punktów (x, y), które spełniają warunek: a) $|2x - y| = 2|x| - y$, b) $|2x - y| > 2|x| - y$.
(9) Znaleźć i naszkicować zbiór punktów (x, y), które spełniają układ nierówności: $|y-x| \leq 1$, $|x+3| \leq 1$.
(10) (∗) Znaleźć i naszkicować zbiór punktów (x, y), które spełniają warunek $max\{|x - 3|, |y - 1|\} \leq 2$.

7.2. **Odległość, okrąg, koło,itp.**

(1) Odległość punktów na płaszczyźnie, równanie okręgu; napisać równanie okręgu o środku w punkcie $(1, -2)$ i promieniu 6.
(2) Naszkicować w układzie współrzędnych rozwiązanie nierówności: a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y \geq -1$, b) $2x^2 + 2y^2 - 2x + 4y < -1$.
(3) Proste prostopadłe: wyprowadzić warunek na m, n, aby proste dane równaniami: $y = mx$ oraz $y = nx$ były prostopadłe (bez il. skalarnego, wybrać dowolne punkty na każdej z prostych i napisać tw. Pitagorasa).
(4) Znaleźć odległość punktu $P = (1, -1)$ od prostej o równaniu $4y - x - 8 = 0$ (oczywiście nie chodzi o zastosowanie wzoru, a rozwiązanie "na piechotę").
(5) Napisać równanie symetralnej odcinka AB, $A := (1, 1)$, $B = (2, 4)$.
(6) Podać równanie okręgu przechodzącego przez punkty $(7, 1)$, $(5, 6)$ i $(-2, 4)$.
(7) Znaleźć odległość prostych $y = ax + b$, $y = ax$.
(8) Obliczyć pole trójkąta utworzonego przez proste o równaniach: $y = 0$, $2y - x = 1$ i $y + 4x = 8$.
(9) Wykazać, że istnieje dokładnie 1 prosta mająca z okręgiem $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ dokładnie 1 punkt wspólny $(0, 0)$. Podać jej równanie. Sprawdzić, że jest ona prostopadła do promienia przechodzącego przez $(0, 0)$,
(10) Podać równanie okręgu przechodzącego przez punkty $(3, 0)$, $(7, -2)$ i stycznego do osi OX.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIVERSITAS VARSOVIENSIS
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

(11) (∗) Niech $x_0 > 0$. Wykazać, że istnieje dokładnie 1 prosta o równaniu $y = ax + b$ mająca z parabolą $y = x^2$ dokładnie 1 punkt wspólny (x_0, x_0^2). Znaleźć tę prostą.
(12) Sprawdzić, że odległość punktu (x, x^2) od punktu $(0, \frac{1}{4})$ jest równa odległości od prostej $y = -\frac{1}{4}$.
(13) (∗) Parabola: znaleźć zbiór tych punktów (x, y), których odległość od prostej $y = 0$ jest taka sama, jak odległość od punktu $(0, 1)$.
(14) (∗) Elipsa: znaleźć zbiór tych punktów (x, y), których suma odległości od punktów $(-c, 0)$ i $(c, 0)$ jest stała.
(15) Sprawdzić, że różnica odległości punktu $(x, \frac{1}{x})$ od punktów $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ i $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ jest stała dla $x > 0$ i dla $x < 0$. Znaleźć wartość tych stałych.
(16) (∗) Hiperbola: znaleźć zbiór tych punktów (x, y), których różnica odległości od punktów $(-c, 0)$ i $(c, 0)$ jest stała.

8. Zajęcia 10

Minima programowe: Wektory w $\mathbb{R}^3$ nie pojawiają się w minimach programowych.
Cel: Operacje na wektorach, obliczanie długości, przecięcie prostych, równanie parametryczne prostej i płaszczyzny w $\mathbb{R}^3$. W szkole wektory są konsekwentnie oznaczane $[a, b]$(nawias kwadratowy), nie wydaje się, aby należało tej konwencji ściśle przestrzegać.

8.1. Wektory w $\mathbb{R}^3$, iloczyn skalarny, długość wektora, iloczyn wektorowy.

(1) Dla jakich α, β wektory $\overline{a} := (5, -3, \beta)$, $\overline{b} := (\alpha + 1, 11, -4)$ są równoległe?

(2) Znaleźć punkt przecięcia prostych zadanych parametrycznie: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(3) $(*)$ Podać parametryczny opis płaszczyzny rozpinanej przez proste z zadania poprzedniego i podać równanie ją opisujące. Podać równania opisujące proste z zadania poprzedniego.

(4) Niech $\overline{a} := (1, 2, 3)$, $\overline{b} := (0, 2, 1)$ oraz $\overline{c} := (1, 1, 1)$. Znaleźć wektor $\overline{a} - 2\overline{b} + 3\overline{c}$; obliczyć jego długość.

(5) Dane są wektory $\overline{a} := (1, -2)$, $\overline{b} := (-1, 5)$. Obliczyć: $\overline{a} \cdot \overline{b}$, $(\overline{a} + \overline{b})^2$.

(6) Obliczyć długości boków trójkąta ABC dla $\overline{AB} := (1, 1, 1)$ i $\overline{AC} := (2, -1, 0)$.

(7) Wykazać, że punkty $(-2, 1), (3, 4), (-5, 6)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego. Znaleźć długości boków i kąty tego trójkąta.

(8) Sprawdzić, że wektor $\overline{b}(\overline{a} \cdot \overline{c}) - \overline{c}(\overline{b} \cdot \overline{a})$ jest prostopadły do wektora $\overline{a}$.

(9) Z punktu $(1, 2, 1)$ wystawić prostą prostopadłą do płaszczyzny $x + y + 2z = 5$ (równanie prostej w postaci parametrycznej, bez iloczynu wektorowego, metodą "na piechotę")

(10) $(*)$ Podać opis parametryczny płaszczyzny zadanej równaniem $x + y + 2z = 5$.

(11) Znaleźć wektor prostopadły do wektorów $\overline{a} := (1, -3, 2)$, $\overline{b} = (-2, 1, -1)$. Znaleźć pole równoległoboku rozpiętego przez wektory $\overline{a}$ i $\overline{b}$.

(12) Wzór na iloczyn wektorowy, podstawowe własności (brak łączności tego działania i tożsamość Jakobiego).

(13) Znaleźć wektor prostopadły do płaszczyzny, na której leżą proste l_1 i l_2 o równaniach: $l_1 = (1, 2, 0) + \lambda(2, 1, -2)$ oraz $l_2 = (3, 2, 2) + \mu(0, 1, 3)$.

(14) Powtórzyć zadanie z prostą prostopadłą do płaszczyzny $x + y + 2z = 5$ z użyciem iloczynu wektorowego.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIVERSITAS VARSOVIENSIS
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

9. Zajęcia 11

Minima programowe: Obrazy podstawowych figur geometrycznych w symetrii osiowej i środkowej znajdują się na poziomie podstawowym, jednokładność wspomniana jest na poziomie rozszerzonym. Pojęcie ciągu występuje na poziomie podstawowym, ciąg zadany rekurencyjnie na rozszerzonym.
Cel: Znajdowanie analitycznych wyrażeń dla podstawowych operacji geometrycznych. Znajdowanie obrazów. Badanie monotoniczności ciągu.

9.1. **Przekształcenia w układzie współrzędnych, ciągi.**

(1) Niech (x', y') będą współrzędnymi obrazu punktu (x, y) w przekształceniu P. Podać zależność (x', y') od (x, y) dla:
 a) P– odbicie względem prostej $y = x$;
 b) P – złożenie odbicia względem prostej $y = x$ z odbiciem względem prostej $y = x + 2$;
 c) P – złożenie odbicia względem prostej $y = x$ z odbiciem względem prostej $y = -x$;
 d) P – obrót o kąt α wokół $(0, 0)$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara;
 e) P – jednokładność o środku $(1, 1)$ i skali 4.

(2) Znaleźć obraz prostej $2y + 3x + 1 = 0$ w odbiciu względem prostej $x + y = 0$.

(3) Znaleźć obraz paraboli $y = x^2$ w odbiciu względem prostej a) $y = x$, b) $y = 2x + 2$.

(4) $(*)$ Znaleźć obraz hiperboli $yx = 1$ w obrocie wokół $(0, 0)$ o kąt $\frac{\pi}{4}$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

(5) Naszkicować zbiór punktów (x, y) spełniających równanie: a) $x^2 + y^2 = -4x - 6y + 12$, b) $4x^2 = xy$, c) $y^2 - 4y = 2 - 6x$.

(6) $(*)$ Znaleźć obraz krzywej o równaniu $x^2 - 2xy + y^2 - 12x - 12y = -36$ po obrocie o kąt $\frac{\pi}{4}$ wokół $(0, 0)$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówk zegara.

9.2. **Ciągi.**

(1) Ciąg o wyrazach rzeczywistych=funkcja, której dziedziną jest $\mathbb{N}$.

(2) Zbadać, które z podanych ciągów są monotoniczne (być może począwszy od pewnego wyrazu): a) $a_n := \frac{n+7}{2n-9}$; b) $b_n := \frac{3-2n}{5n+6}$; c) $c_n := \frac{1}{2n^2+3n-3}$; d) $d_n := (-1)^n \frac{n+3}{3n+4}$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIVERSITAS VARSOVIENSIS

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

10. Zajęcia 12

Minima programowe: Ciągi arytmetyczny i geometryczny wraz ze wzorami na sumę pojawiają się na poziomie podstawowym.
Cel: Rozpoznawanie ciągu arytmetycznego i geometrycznego, stosowanie wzorów na sumę.

10.1. **Ciąg arytmetyczny.**

(1) Obliczyć n-ty wyraz ciągu arytmetycznego zadanego przez a_1 i r: a) $a_1 = 5\,,\ r = -2\,,\ n = 11$; b) $a_1 = -12\,,\ r = 2\,,\ n = 7$.
(2) Który z podanych ciągów jest arytmetyczny: $a_n := \frac{1}{3}(4n-1)\,,\ b_n := \frac{n+2}{2n+1}\,,\ c_n := \log_{10}(2^{\frac{n}{2}})$.
(3) Niech $a_n := n^2$, wykazać, że ciąg $b_n := a_{n+1} - a_n$ jest ciągiem arytmetycznym.
(4) Znaleźć parametry a_1, r ciągu arytmetycznego, jeżeli różnica między wyrazem 8-ym a 3-cim wynosi 100, a suma wyrazu 4-tego i 7-ego wynosi 24.
(5) Znaleźć parametry a_1, r ciągu arytmetycznego jeżeli $a_3 + a_5 = 10$ oraz $a_6 + a_8 = 10$.
(6) Wzór na sumę ciągu arytmetycznego.
(7) Znaleźć sumę wszystkich liczb nieparzystych większych od 10 i mniejszych od 1200.
(8) Ciąg arytmetyczny składa się z 20 wyrazów. Suma wyrazów parzystych wynosi 250, a nieparzystych 220. Znaleźć wyrazy a_9 i a_{10}.

10.2. **Ciąg geometryczny.**

(1) O ile procent wzrośnie wartość lokaty bankowej 5% (z kapitalizacją roczną) w ciągu 3 lat.
(2) Jaka jest wartość po upływie roku lokaty bankowej o rocznej stopie procentowej $r\%$ z kapitalizacją kwartalną, miesięczną, dzienną, godzinową ?
(3) Suma ciągu geometrycznego: wzór $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n) = 1 - x^{n+1}$
(4) Ciąg (a,b,c) jest jednocześnie arytmetyczny i geometryczny. Jakie zależności zachodzą między a, b i c ?
(5) Znaleźć $32 < x < y < 500$ takie, by ciąg $(32, x, y, 500)$ był ciągiem: a) arytmetycznym, b) geometrycznym.
(6) W rosnącym ciągu geometrycznym suma $2n$ początkowych wyrazów wynosi 63 a suma $3n$ początkowych wyrazów 511. Obliczyć sumę n początkowych wyrazów.
(7) ($*$) Niech $q > 1$. Wykazać, że dla dowolnej liczby M istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $q^n \geq M$ dla wszystkich $n \geq n_0$ (wykorzystać nier. Bernoulliego); korzystając z tego wykazać, że jeżeli $|q| < 1$ to dla dowolnej liczby $M > 0$ istnieje n_0 takie, że $|q|^n \leq M$ dla $n \geq n_0$.
(8) ($*$) W jakim sensie $\frac{1}{3} = 0.(3)$? (korzystając ze wzoru na sumę ciągu geometrycznego i zadania powyżej; raczej “machając rękami” niż formalnie licząc granicę)
(9) ($*$) Powtórzyć rachunek dla $\frac{2}{13}$.

KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI
UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ SPOŁECZNY
Projekt Fizyka Plus jest współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.