Projekt *Fizyka Plus nr POKL.04.01.02-00-034/11* współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Kurs Start plus – poziom zaawansowany, materiały dla prowadzących, Marcin Kościelecki

Uwagi ogólne: przed rozpoczęciem zajęć warto zapoznać się z aktualnymi wymaganiami programowymi Centralnej Komisji Egzaminacyjnej:
`http://www.cke.edu.pl/images/stories/Inf_mat_08/mat_informator_10.pdf`, *str.*13−17.
Przedsądy związane z aktualną wiedzą wynoszoną ze szkoły średniej a oparte na osobistych wspomnieniach prowadzącej/prowadzącego zajęcia mogą prowadzić do niepotrzebnych nieporozumień. Zadania staramy się rozwiązywać biorąc studentów do tablicy – mimo, że większość studentów ma za sobą profil rozszerzony, praktyczne umiejętności związane choćby z redakcja odpowiedzi potrafią być zaskakująco skromne. Poziom trudności modułów rośnie, ostatni może wypełnić nawet dwa zajęcia.

Zajęcia 1.

Logarytmy. Równania kwadratowe z parametrem, wykres funkcji.
Minima programowe:
Wszystkie zagadnienia pojawiły się na poziomie rozszerzonym.
Cel: Uporządkowanie wiadomości. Umiejętność sformułowania dowodu matematycznego. Pierwsze trzy moduły maja charakter techniczny i warto je szybko zrobić, pozwolą na wyłapanie słabszych rachunkowo studentów, których można dodatkowo przećwiczyć zestawem z poziomu podstawowego.

1. Znaleźć liczbę, która daje się jednoznacznie przedstawić jako iloczyn dwóch liczb dodatnich, takich, że różnica ich logarytmów o podstawie 2 jest równa ilorazowi tych logarytmów.

2. Udowodnić, że dla dowolnych liczb a, b, N spełniających warunki: $a, b, N > 0$, $a \neq 1$,$ab \neq 1$, $N \neq 1$, $\frac{\log_a N}{\log_{ab} N} = 1 + \log_a b$.

3. Udowodnić, że dla dowolnej liczby $N > 0$ i $N \neq 1$,
$\frac{1}{\log_2 N} + \frac{1}{\log_3 N} + \frac{1}{\log_4 N} + \cdots + \frac{1}{\log_{10} N} = \frac{1}{\log_{10!} N}$.

4. Dla jakich wartości parametru m rozwiązania równania $x^2 - 2mx + m^2 - 4 = 0$ należą do przedziału $[p, q[$, gdzie p jest rozwiązaniem równania $2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = 1$, zaś q – rozwiązaniem równania $\frac{\ln x}{\ln(2x-4)} = 1$?

5. Rozwiązać równanie: $\ln \ln \ln x = 0$.

6. Narysować zbiór rozwiązań nierówności: $\log_x(\log_y x) > 0$.

7. Przedyskutować ze względu na parametr m rozwiązalność równania $\frac{\log(mx)}{\log(x+1)} = 2$.

Zajęcia 2.

Równania kwadratowe. Układy równań. Proste dowody.
Minima programowe:
Dowody matematyczne nie są wymagane na poziomie rozszerzonym.
Cel: Umiejętność przedstawienia rozwiązania skomplikowanego problemu. Poprawne zapisanie dowodu matematycznego.

1. Ile istnieje równań postaci $x^2-px-q=0$, których współczynniki $p, q \in \mathbb{N}$ i pierwiastki dodatnie są mniejsze od 10?

2. Ile istnieje równań postaci $x^2-px-q=0$, których współczynniki $p, q \in \mathbb{N}$ i pierwiastki dodatnie są mniejsze od danej liczby $r \in \mathbb{N}$?

3. Wykazać, że jeżeli x, y, z spełniają równania: $x+y+z = xyz$, $x^2 = yz$ oraz $x \neq 0$, to $x^2 > 3$.

4. Wykazać, że jeżeli $a+b=1$, to $a^4+b^4 \geqslant \frac{1}{8}, \quad a, b \in \mathbb{R}$.

Zajęcia 3.

Funkcje trygonometryczne, badanie funkcji.
Minima programowe:
Na poziomie rozszerzonym pojawiły się proste równania trygonometryczne i pojęcie asymptot poziomych i pionowych.
Cel: Umiejętność badania funkcji. Studenci, których nauczyciele nie wykroczyli poza minima programowe nie mieli w szkole pojęcia pochodnej oraz granicy funkcji. Do rozwiązania zadań e, f, g wystarczą wzory na pochodną wielomianu i ilorazu dwóch funkcji.

1. Udowodnić, że: $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

2. Rozwiązać równania: i) $\sin x + \cos x = \sqrt{\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x}$, ii) $(\cos x)^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = 1$, iii) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2}$.

3. Zbadać istnienie asymptot wykresu funkcji: $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$.

4. Zbadać asymptoty wykresu funkcji: $f(x) = \frac{x^3}{3(x^2-x-2)}$.

5. Zbadać funkcję: $f(x) = \frac{x^2}{2(x-3)}$.

6. Zbadać funkcję: $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

7. Zbadać zmienność objętości prostopadłościanu o podstawie kwadratowej i danej długości d przekątnej ściany bocznej, w zależności od długości krawędzi podstawy.

Zajęcia 4.

Indukcja matematyczna.
Minima programowe:
Materiał wykracza poza wymagania szkoły średniej, chyba, że student trafił na ambitnego nauczyciela.
Cel: Umiejętność przeprowadzenia dowodu indukcyjnego.

1. Udowodnić, że $\forall n \in \mathbb{N}_+$ prawdziwa jest równość: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. Udowodnić, że $\forall n \in \mathbb{N}_+$ prawdziwa jest równość: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$.
3. Udowodnić, że $\forall n \in \mathbb{N}_+$ prawdziwa jest nierówność: $(1+x)^n \geqslant 1 + nx, \quad x \geqslant -1$.
4. Udowodnić, że $\forall n \in \mathbb{N}_+$: $2 \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant n + 1$.
5. Udowodnić, że $\forall n \in \mathbb{N}_+$: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant 3$.
6. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ liczba $n^3 - n$ jest podzielna przez 6.
7. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ liczby $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ oraz $11^{n+1} + 12^{2n-1}$ są podzielne przez 133.
8. Wykazać, że każdy n-kąt wypukły ma $\frac{n(n-3)}{2}$ przekątnych.

Zajęcia 5.

Ciąg arytmetyczny i geometryczny. Ciągi rekurencyjne.
Minima programowe:
Granica ciągu rekurencyjnego nie jest ujęta w minimach programowych.
Cel: Umiejętność radzenia sobie z nietrywialnymi zadaniami. Metodologię związaną z badaniem granic ciągów rekurencyjnych wypracować razem ze studentami.

1. Udowodnić, że jeżeli liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tworzą ciąg arytmetyczny, to dla $n > 1$ spełniona jest nierówność: $a_1 - \binom{n}{1}a_2 + \binom{n}{2}a_3 + \cdots + \binom{n}{k}(-1)^k a_{k+1} + \cdots + (-1)^n a_{n+1} = 0$.
2. W trójkąt równoboczny o boku długości a wpisano okrąg. Następnie wpisano trzy okręgi styczne do danego okręgu i boków trójkąta. Czynność tę powtórzono nieskończenie wiele razy. Obliczyć sumę pól wpisanych kół.
3. Wyznaczyć wartości x, dla których istnieje granica: $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{x+2} + \frac{2x+1}{(x+2)^2} + \cdots + \frac{(2x+1)^{n-1}}{(x+2)^n}\right]$

4. Udowodnij, że granica ciągu pól wieloboków foremnych wpisanych w koło równa jest granicy ciągu pól wieloboków foremnych opisanych na tym kole.

5. Obliczyć granicę ciągu obwodów wieloboków foremnych wpisanych w koło o promieniu r.

6. Zbadaj zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie: $x_0 \in]-1,2[, x_{n+1} = x_n(x_n - 1)$

7. Zbadaj zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie: $x_0 > 1, x_{n+1} = \frac{x_n - 2}{x_n - 1}$

8. Zbadaj zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie: $x_0 > \frac{1}{5}, x_{n+1} = \frac{3x_n + 1}{5x_n - 1}$

9. Zbadaj zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie: $x_0 =, x_{n+1} = \sqrt{2 - x_n}$

10. Zbadaj zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie: $x_0 \in \mathbb{R}, x_{n+1} = \frac{10}{1+x_n^2}$.

Zajęcia 6.

Liczby zespolone cz. I

Minima programowe:

Materiał wykracza poza wymagania szkoły średniej, chyba, że student trafił na ambitnego nauczyciela.

Cel: Praktyczna umiejętność operowania liczbami zespolonymi.

1. Uprościć wyrażenia: $(\sqrt{2}+i)(3-\sqrt{3}i)$, $\frac{2-3i}{5+4i}$

2. Znaleźć postać trygonometryczną (biegunową) liczby zespolonej z:

$$(a)\, z = 1 + e^{i\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}; \quad (b)\, z = 2 + \sqrt{3} + i.$$

3. Dowieść, że:

$$(a)\, \frac{1+it}{1-it} = e^{2i \operatorname{arc\,tg} t} \text{ dla } t \in \mathbb{R};\ (b)\, \frac{z-1}{z+1} = i \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \text{ dla } z = e^{i\varphi},\ \varphi \in]-\pi, \pi[;$$

$$(c)\, \frac{z-i}{z+i} = i \operatorname{tg}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \text{ dla } z = e^{i\varphi}, \varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[;$$

$$(d) \text{ Jeżeli } \operatorname{tg}\varphi = i\frac{1-z}{1+z}, \text{ to } \operatorname{tg} n\varphi = i\frac{1-z^n}{1+z^n}, \text{ dla } z \in \mathbb{C}, z \neq -1 \neq z^n,\ \varphi \in \mathbb{R}$$

$$(e)\, \left(\frac{1+i\operatorname{tg} x}{1-i\operatorname{tg} x}\right)^n = \frac{1+i\operatorname{tg} nx}{1-i\operatorname{tg} nx}$$

4. Uzasadnić, że pole trójkąta, którego jeden wierzchołek jest w początku układu współrzędnych, a pozostałe dwa są w punktach z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, wyrażają się wzorem $\frac{1}{2} \operatorname{Im} |(\bar{z}_1 \cdot z_2)|$.

5. Obliczyć i narysować wszystkie wartości wyrażenia:

$$(a) \sqrt[3]{\sqrt[3]{2-2i}-\frac{1}{2}(1+i)};\ (b) \sqrt[3]{\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}};\ (c) \frac{(-\cos\alpha+i\sin\alpha)^5}{-1+i\sqrt{3}}.$$

Zajęcia 7.

Liczby zespolone cz. II

Minima programowe:

Materiał wykracza poza wymagania szkoły średniej, chyba, że student trafił na ambitnego nauczyciela.

Cel: Umiejętność rozwiązywania trudniejszych związanych z funkcjami zespolonymi.

1. Dowieść, że:

$$\prod_{p=1}^{n}(z-\lambda\epsilon^p)=z^n-\lambda^n,$$

gdzie ϵ jest n-tym pierwiastkiem z jedności, $\epsilon=e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

2. Wyprowadzić wzory:

$$(a)\ \sum_{k=1}^{n}\cos(2k-1)\varphi=\frac{\sin 2n\varphi}{2\sin\varphi},\ \text{jeżeli}\ \sin\varphi\neq 0;$$

$$(b)\ \sum_{k=-n}^{n}\cos k\varphi=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}},\ \text{jeżeli}\ \sin\frac{\varphi}{2}\neq 0;$$

3. Zbadać i narysować podany podzbiór płaszczyzny $\mathbb{C}$:

$$(a)\ S=\{z:\operatorname{Re}(\bar{z}-\bar{z}_1)(z-\bar{z}_2)=0\}$$

$$(b)\ S=\left\{z:\operatorname{Im}\frac{z-1}{z(z+1)}>0\right\};\ (c)\ S=\left\{z:\operatorname{Im}\frac{(z+1)(z-i)}{(z-1)(z-i)}>0\right\};$$

4. Narysować zbiór: $S=\{\frac{1+ti}{1-ti}, t\in\mathbb{R}\}$.

5. Zbadać i narysować zbiór $f^{-1}(S):=\{z:f(z)\in S\}$ jeżeli:

$$(c)\ S=\left\{z\in\mathbb{C}:0<\arg z<\frac{\pi}{4}\right\},\ f(z):=\frac{z+i}{z-i}, z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}.$$