Projekt *Fizyka Plus nr POKL.04.01.02-00-034/11* współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki

Kurs Start plus - matematyka poziom podstawowy, materiały dla prowadzących, Marcin Kościelecki

Uwagi ogólne: przed rozpoczęciem zajęć warto zapoznać się z aktualnymi wymaganiami programowymi Centralnej Komisji Egzaminacyjnej:
`http://www.cke.edu.pl/images/stories/Inf_mat_08/mat_informator_10.pdf`, *str.* 13 – 17.
Przedsądy związane z aktualną wiedzą wynoszoną ze szkoły średniej a oparte na osobistych wspomnieniach prowadzącej/prowadzącego zajęcia mogą prowadzić do niepotrzebnych nieporozumień.

Zadania staramy się rozwiązywać biorąc studentów do tablicy, szczególnie gdy dotyczy to problemów związanych z wykresami funkcji itp. Gdyby młodzież okazała się lepiej przygotowana niż zazwyczaj, można wykorzystać moduł dodatkowy i materiały dla grupy zaawansowanej.

Zajęcia 1.

Wektory - podstawowe własności i zastosowania. Dodawanie, długość wektora. Parametryczny opis prostej. Wektor prędkości. Wartość bezwzględna.
Minima programowe:
Dodawanie wektorów i podstawowe działania jedynie na poziomie rozszerzonym. Proste równania z wartością bezwzględną – jedynie poziom rozszerzony.
Cel: Zwiększenie sprawności rachunkowej związanej z zastosowaniem wektorów, umiejętność posługiwania się opisem parametrycznym prostej.

1. Dane są trzy wektory: $\vec{a} = [1, 0, -1]$, $\vec{b} = [2, -1, 3]$, $\vec{c} = [1, 1, 2]$. Znaleźć wektor $\vec{x} = 3\vec{a} - \vec{b} + 4\vec{c}$.

2. Obliczyć długości przekątnych równoległoboku $ABDC$ zbudowanego na wektorach $\overrightarrow{AB} = [3, -2, 1]$ i $\overrightarrow{AC} = [0, 3, -1]$.

3. Przy jakich wartościach α i β wektory $\vec{a} = [5, -3, \alpha]$ i $\vec{b} = [\beta, 9, -2]$ są równoległe?

4. Dany jest wektor $\vec{a} = [3, -4]$. Znaleźć wektor jednostkowy równoległy do wektora $\vec{a}$.

5. Narysować tor samolotu startującego z punktu $[0, 0]$ i lecącego w kierunku zgodnym z wektorem $\vec{a} = [3, -4]$ z prędkością 10km/h.

6. Znaleźć ogólny wzór na położenie samolotu $[x, y]$ w chwili t, jeżeli wystartował on z punktu $[1, 2]$ i poleciał w kierunku równoległym do wektora $\vec{a} = [-4, 3]$ z prędkością 15km/h. Po jakim czasie samolot dotrze do punktu $[-239, 182]$?

7. Znaleźć dwa różne parmetryczne równania prostej przechodzącej przez punkty $(2, 3)$ i $(3, 5)$.

8. Dwie linie opisane parametrycznie: $L_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ i $L_2 = \begin{bmatrix}1\\4\\5\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$ przecinają się. Znaleźć współrzędne punktu przecięcia

9. Dwa samoloty poruszają się po prostych. O godz. 13 : 00 pierwszy samolot znajdował się w punkcie $(3, 2, 7)$. Jego pozycję po t minutach opisuje zależność: $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\\7\end{bmatrix} + t \begin{bmatrix}3\\4\\10\end{bmatrix}$. Znajdź prędkość samolotu. O godzinie 13 : 00 drugi samolot znajdował się w punkcie $(-5, 10, 23)$. Po dwóch minutach znalazł się w punkcie $(3, 16, 39)$. Pokaż, że pozycję drugiego samolotu opisuje zależność: $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\10\\23\end{bmatrix} + t \begin{bmatrix}4\\3\\8\end{bmatrix}$. Po jakimś czasie samoloty spotkały się w punkcie Q. Podaj czas i współrzędne punktu spotkania.

10. Prosta opisana jest w postaci parametrycznej: $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix} + t \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$. Znaleźć równanie prostej w postaci $y = ax + b$.

11. Znaleźć równanie parametryczne prostej $y = 2x - 1$.

12. Narysować wykres funkcji $y = 2|x| - |x + 1|$.

13. Rozwiązać rachunkowo i graficznie nierówność: $|3x - 2| \leqslant 2$

14. Rozwiązać rachunkowo i graficznie nierówność: $|x + 3| > |2x - 1|$

Zajęcia 2.

Równania kwadratowe, manipulacja wyrażeniami algebraicznymi i wykresami funkcji.
Minima programowe:
Rozkładanie wielomianu na czynniki przy pomocy wzorów skróconego mnożenia oraz manipulacja wykresem funkcji obecne sa na poziomie podstawowym, równania kwadratowe z parametrem to już poziom rozszerzony.
Cel: Powtórka i zwiększenie sprawności rachunkowej przy pomocy mniej standardowych zadań.

1. Wiedząc, że $(a+b)^2 = a^2 + 2ab - b^2$ oraz $(a^2 - b^2) = (a-b)(a+b)$ przedstawić wielomian $f(x) = x^2 + 2x - 3$ w postaci $(x \pm c)^2 - d^2$ a potem w postaci $(x - x_1)(x - x_2)$. UWAGA: nie korzystamy ze wzorów na deltę, bo zależy nam na umiejętności manipulacji wyrażeniami algebraicznymi.

2. Zastosować wyniki poprzedniego zadania do funkcji: a) $f(x) = x^2 - x - 2$, b) $f(x) = x^2 + 3\sqrt{2}x + 4$, c) $f(x) = -x^2 - x + \frac{3}{4}$, d) $f(x) = 2x^2 + 7x + 3$.

3. Narysować każdy z powyższych wielomianów zaznaczając miejsca zerowe i punkt, w którym funkcja osiąga wartość największą lub najmniejszą.

4. Dla jakich wartości zmiennej $x \in [0,2]$ funkcja $f(x) = \frac{1}{1-x+x^2}$ przyjmuje wartość największą a dla jakiej najmniejszą?

5. W trójkąt równoramienny, którego podstawa ma długość 6cm i wysokość ma 6cm wpisano prostokąt. Jakie powinny być długości boków prostokąta aby jego pole było największe?

6. Niech $g(x) = x - 5$ a $f(x) = x^2 - 4$. Dla jakich wartości x zachodzi nierówność: $g(f(x)) \leqslant f(g(x))$?

7. Dla funkcji z punktów a) i b) narysować wykresy $f(x) + 1$, $f(x) - 2$, $2f(x)$, $\frac{1}{2}f(x)$, $-f(x)$, $|f(x)|$, $f(x-2)$, $f(x+1)$, $f(-x)$, $f(2x)$, $f(\frac{1}{2}x)$.

8. Powiedzieć jakie operacje należy zastosować do funkcji $f(x) = x^2$ (Translacja, odbicie itp.) by otrzymać funkcje z punktów a) i b). Podać wartości parametrów a, b, c dla których funkcje z punktów a) i b) można zapisać jako $f(x) = ag(x-b) + c$, gdzie $g(x) = x^2$

9. Jakie operacje (translacja, odbicie, itp.) należy zastosować do funkcji $f(x) = x^2$ by otrzymać wykres funkcji $f(x) = -|2(2x-3)^2| - 7$?

10. Znaleźć trójmian kwadratowy $y(x) = ax^2 + bx + c$ jeżeli do jego wykresu należy punkt $A(3,0)$ i $y_{\max} = y(1) = 12$.

11. Dla jakich wartości parametru m równanie $mx^2 - 3x + m = 0$ ma jedno rozwiązanie?

12. Dla jakich wartości zmiennej x, wektory $[2x, x-3]$ oraz $[x+1, 5]$ są do siebie prostopadłe?

13. Rozwiązać równanie $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

14. Rozwiązać równanie $x - 2\sqrt{x-3} - 6 = 0$

15. Dla jakich wartości parametru m dwa różne pierwiastki rzeczywiste równania $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ należą do przedziału $(-2, 4)$?

Zajęcia 3.

Funkcje trygonometryczne. Wykresy, najprostsze wzory redukcyjne. Jedynka trygonometryczna. Równania.
Minima programowe:
Znajomość wykresu funkcji trygonometrycznych oraz podstawowe wzory redukcyjne wymagane są jedynie na poziomie rozszerzonym.
Cel: Sprawność rachunkowa i swoboda w posługiwaniu się funkcjami trygonometrycznymi.

1. Sporządzić wykres funkcji $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \mathrm{tg}(x)$, $f(x) = \mathrm{ctg}(x)$.

2. Narysować funkcje, znaleźć ich amplitudy i okres: $f(x) = \sin(-x)$, $f(x) = \cos(-x)$, $f(x) = \mathrm{tg}(-x)$, $f(x) = \mathrm{ctg}(-x)$.

3. Narysować funkcje: $f(x) = \sin(x - \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \mathrm{tg}(x - \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \mathrm{ctg}(x - \frac{\pi}{2})$.

4. Narysować funkcje: $f(x) = \sin(x - \pi)$, $f(x) = \cos(x - \pi)$, $f(x) = \mathrm{tg}(x - \pi)$, $f(x) = \mathrm{ctg}(x - \pi)$.

5. Narysować funkcje: $f(x) = \sin(x - 2\pi)$, $f(x) = \cos(x - 2\pi)$, $f(x) = \mathrm{tg}(x - 2\pi)$, $f(x) = \mathrm{ctg}(x - 2\pi)$.

6. Narysować funkcje, znaleźć ich amplitudy i okres: $f(x) = \sin(2x)$, $f(x) = \cos(\frac{1}{2}x)$, $f(x) = \mathrm{tg}(3x)$, $f(x) = \mathrm{ctg}(\frac{1}{3}x)$, $f(x) = 2\sin(x)$, $f(x) = \frac{1}{2}\cos(x)$, $f(x) = \mathrm{tg}(x) + 1$, $f(x) = \mathrm{ctg}(x) - 2$.

7. Narysować wykres funkcji, podać amplitudę i okres: $f(x) = -|-2\sin(-2x - 3) + 1| - 3$

8. Narysować wykres funkcji, podać amplitudę i okres: $f(x) = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}x) - 1$

9. Korzystając z tw. Pitagorasa i definicji sinusa i cosinusa dla trójkąta prostokątnego policzyć sumę $\sin^2 x + \cos^2 x$

10. Korzystając z poznanych własności funkcji trygonometrycznych i ich wartości dla: $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$ policzyć: $\cos(135°)$, $\sin(225°)$, $\mathrm{tg}(315°)$, $\sin(-115°)$, $\cos(420°)$, $\sin(660°)$

11. Uprościć wyrażenie: $\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}$.

12. Policzyć $\mathrm{tg}(x)$ wiedząc, że $\cos(x) = \frac{3}{5}$ i $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

13. Wiedząc, że $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$, rozwiązać równanie: $\sin(2x) = \frac{1}{2}$.

14. Rozwiązać równanie $\cos(2x) < \frac{1}{2}$.

15. Rozwiązać równanie: $\sin(2x) = \sin x$

Zajęcia 4.

Iloczyn skalarny, wektory prostopadłe, elementy geometrii analitycznej: odległość punktu od prostej, równanie okręgu, styczna do okręgu.
Minima programowe:
Wzór (bez wyprowadzenia) na odległość punktu od prostej jedynie na poziomie rozszerzonym. Równanie okręgu pojawia sie na poziomie podstawowym.
Cel: Iloczyn skalarny wykracza poza minima programowe a bez niego nie da się rozłożyć siły na składowe w mniej trywialnych przypadkach. Należy wyciwiczyć też umiejętność rozwiązywania zadań z geometrii analitycznej bez znajomości „gotowych wzorów“ – ew. wzór na odległość punktu od prostej wyprowadzić razem ze studentami.

1. Dane są wektory $\overline{u} = [1, -2]$ i $\overline{v} = [-1, 5]$.
   Obliczyć: a) $\overline{u} \cdot \overline{v}$, b) $\overline{u}^2$, c) $\overline{d}^2$, d) $(\overline{u} + \overline{v})^2$, e) $(\overline{u} + 2\overline{v})(3\overline{u} - \overline{v})$.

2. Udowodnić, że punkty $A(-2, 1)$, $B(3, 4)$, $C(-5, 6)$ są wierzchołkami trójkąta prostokątnego. Znaleźć pozostałe kąty tego trójkąta.

3. Obliczyć $(\overline{a} - \overline{b})^2$ oraz $(\overline{a} + \overline{b})^2$ wiedząc, że $a = 1$, $b = 3$ oraz $\sphericalangle(\overline{a}, \overline{b}) = \frac{\pi}{4}$.

4. Dany jest na płaszczyźnie kwadrat o wierzchołkach $A(-1, 1)$, $B(3, -1)$, $C(3, 1)$ i $D(1, 1)$. Układ współrzędnych obrócono wokół punktu $(0, 0)$ o kąt $\varphi = 45°$ oraz przesunięto o wektor $\overline{v} = [1, -1]$. Jakie są współrzędne kwadratu po obrocie i przesunięciu?

5. Wykazać, że wektor $\overline{p} = \overline{b}(\overline{c} \cdot \overline{a}) - \overline{c}(\overline{b} \cdot \overline{a})$ jest prostopadły do wektora $\overline{a}$

6. Dany jest punkt $A(1, 3)$ i prosta $l : 3x - 2y + 5 = 0$. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt A oraz: a) równoległej do l, b) prostopadłej do l.

7. Obliczyć odległość punktu $A(1, 2)$ od prostej przechodzącej przez punkty $B(4, -2)$ i $C(1, -6)$.

8. Znaleźć odległość punktu $A(1, -1)$ od prostej $l : 3x - 4y + 8 = 0$

9. Napisać równanie okręgu przechodzącego przez punkty $A(3, -6)$, $B(1, 0)$, $C(5, -2)$

10. Znaleźć równanie okręgu, do którego należą punkty $A(3, 0)$, $B(7, -2)$, stycznego do osi OX.

11. Napisać równanie stycznej do okręgu $x^2 + (y - 1)^2 = 10$ w punkcie $A(1, 4)$.

12. Znaleźć równanie okręgu o środku w punkcie $S(1, 1)$, który odcina na prostej $3x - 4y - 29 = 0$ cięciwę o długości równej 16.

Zajęcia 5.

Geometria analityczna, iloczyn wektorowy. Równanie płaszczyzny. Równanie parametryczne okręgu.
Minima programowe:
Żadne z zagadnień nie wchodzi w minima programowe choć bez iloczynu wektorowego nie da się studiować fizyki.
Cel: Umiejętność zastosowania iloczynu wektorowego w geometrii analitycznej – warto podkreślić związek iloczynu wektorowego z polem magnetycznym.

1. Podać równanie płaszczyzny prostopadłej do wektora $[2, 3, -1]$ zaczepionego w środku układu współrzędnych.

2. Podać równanie płaszczyzny prostopadłej do wektora $[2, 3, -1]$ zaczepionego w punkcie $(1, 2, 3)$.

3. Znaleźć współrzędne punktu, w którym prosta zadana parametrycznie: $x = 2\lambda + 4$, $y = -\lambda - 2$, $z = 3\lambda + 2$ przecina płaszczyznę o równaniu $2x + 3y - z + 2$.

4. Znaleźć wektor prostopadły do wektorów $\vec{a} := [1, -3, 2]$, $\vec{b} = [-2, 1, -1]$. Znaleźć pole trójkąta rozpiętego przez wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

5. Znaleźć wektor prostopadły do płaszczyzny na której leżą proste l_1 i l_2 o równaniach: $l_1 = [1, 2, 0] + \lambda[2, 1, -2]$ oraz $l_2 = [3, 2, 2] + \mu[0, 1, 3]$.

6. Znaleźć odległość punktu $A(0, 2, 2)$ od linii $\vec{r} = [5, 9, 6] + \lambda[1, 2, 2]$.

7. Niech $P = (4, 1, -1), Q = (3, 3, 5), R = (1, 0, 2c), S = (1, 1, 2)$. Dla jakich wartości c wektory $\vec{QR}$ i $\vec{PR}$ są prostopadłe? Korzystając z wartości c znaleźć równanie prostej l przechodzącej przez punkt Q i prostopadłej do wektora $\vec{PR}$. Znaleźć równanie płaszczyzny π, która zwiera prostą l i przechodzi przez punkt S. Znaleźć najkrótszą odległość między punktem P a płaszczyzną π.

8. Wiedząc, że niezerowe wektory $\vec{a}$ i $\vec{b}$ spełniają własności: $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, znajdź $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

9. Narysować wykres funkcji $f(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

10. Narysować wykres funkcji $f(t) = (2\cos(t), 2\sin(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Zajęcia 6.

Funkcja wykładnicza, logarytmy, składanie funkcji. *Minima programowe:*
Logarytm i funkcja potęgowa pojawiają się na poziomie podstawowym, znajomość wykresów tych funkcji, to już poziom rozszerzony.
Cel: Biegłość rachunkowa, znajomość wykresów funkcji wykładniczych i logarytmicznych.

1. Narysować funkcje $f(x) = 2^x$, $f(x) = 2^{-x}$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$, $f(x) = |1 - 2^{-x}|$, $f(x) = 3^{|x|}$, $f(x) = 3^{-|x|}$, $f(x) = 3^{\frac{(x-1)^2}{|x-1|}}$.
2. Rozwiązać równanie: $3^{3x-1} = 9^{x+2}$
3. Rozwiązać równanie: $4^{x-5} \cdot 16^{x+3} = 64$
4. Rozwiązać równanie: $4^{x-5} \cdot 16^{x+3} = 64$
5. Rozwiązać równanie: $25^x - 5^{x+1} + 5 = 5^x$
6. Rozwiązać nierówności: $3^x > 27$, $3^{3x} \cdot 27 > \frac{1}{3}$, $9^{\frac{4}{x}} < \sqrt{3}$.
7. Rozwiązać nierówność: $3^{3-x^2} < 9^x$
8. Rozwiązać równanie: $\left(\frac{4}{9}\right)^x \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{2}{3}$
9. Rozwiązać równanie: $256^{\frac{1}{x^2-4}} \cdot \left(\frac{4}{2^x}\right)^{\frac{1}{x+2}} = 4^{\frac{1}{x-2}}$
10. Rozwiązać równanie: $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$
11. Obliczyć na podstawie definicji logarytmu: $\log_{10} \frac{1}{100}$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$, $\log_{\frac{1}{3}} 27$, $\log_{\frac{1}{8}} \frac{1}{2}$, $\log_{\frac{1}{9}} 3\sqrt{3}$, $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}} 8$
12. Narysować funkcje: $f(x) = \log_2 x$, $f(x) = \log_2 |x|$, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} |x|$, $f(x) = |\log_{\frac{1}{2}} |x + 1||$
13. Obliczyć: $4^{\log_2 3}$, $2^{5-\log_2 5}$, $8^{1-\log_2 5}$, $2^{\log_{2\sqrt{2}} 3}$, $\log_3 5 \cdot \log_{25} 81$, $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{\frac{1}{\log_3 2}}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{1+\frac{1}{1-\log_3 2}}$, $36^{1-\log_6 3} + 25^{-\log_5 6}$
14. Udowodnić, że $\log_6 2 = \log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5$
15. Wiedząc, że $\log 2 = a$, obliczyć: a) $\log 5$, b) $\log 125$
16. Wiedząc, że $\log_{14} 7 = a$ i $\log_{14} 5 = b$ obliczyć $\log_{35} 28$.

Zajęcia 7.

Logarytmy cd. Ciąg arytmetyczny i geometryczny. *Minima programowe:*
Ciągi: arytmetyczny i geometryczny pojawiają się na poziomie podstawowym.
Cel: Uporządkowanie wiadomości, umiejętność rozwiązywania mniej niestandardowych zadań.

1. Wyznaczyć dziedzinę funkcji: $f(x) = \sqrt{\log_3 |x-2|}$, $f(x) = \sqrt{\log_x (3-x)}$.
2. Rozwiązać równania: $\log(x-3) - \log(2-3x) = 1$, $\log(54-x^2) = 3\log x$, $\frac{\log(2x-5)}{x^2-8} = \frac{1}{2}$, $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$
3. Rozwiązać równania: $x^{\log x - 2} = 1000$, $4 - \log x = 3\sqrt{\log x}$, $x^{1-\frac{\log x}{4}} = 10$
4. Rozwiązać równania: $\log\log\log x = 0$, $\log_4 \log_3 \log_2 x = \frac{1}{2}$
5. Rozwiązać równanie: $\sqrt{x^x} = x^{\sqrt{x}}$.
6. Rozwiązać równanie: $\log_{\sin x} \frac{4}{3} = -2$.
7. Rozwiązać nierówność $\frac{1}{\log x} + \frac{1}{1-\log x} > 1$.
8. Zbadać, czy ciąg o podanym n-tym wyrazie jest ciągiem arytmetycznym: a) $a_n = \frac{1}{2}(3n-1)$, $b_n = 4n+3$, $c_n = \frac{n}{n+1}$
9. Napisać trzy początkowe wyrazy ciągu arytmetycznego, w którym suma n początkowych wyrazów jest równa: $S_n = 7n^2$, $S_n = 5n^2 + 3n$.
10. Dany jest ciąg $a_n = n^2$. Udowodnić, ze ciąg $b_n = a_{n+1} - a_n$ jest ciągiem arytmetycznym.
11. Ciąg arytmetyczny składa się z 20 wyrazów. Suma wyrazów parzystych jest równa 250 a suma wyrazów nieparzystych 220. Znaleźć dwa środkowe wyrazy ciągu.
12. Logarytmy liczb 2, $2^x - 1$, $2^x + 3$ tworzą ciąg arytmetyczny. Obliczyć x.
13. Czy ciągi $a_n = 2^n$, $b_n = n^2$, $c_n = (-2)^{n-1}$. $d_n = n+1$ są ciągami geometrycznymi?
14. Znaleźć takie x, by ciąg $(5, x, 45)$ był ciągiem geometrycznym.
15. Między liczby 32 i 500 wstawić liczby x i y tak dobrane, by ciąg $(32, x, y, 500)$ był ciągiem geometrycznym

Zajęcia dodatkowe

Ciąg arytmetyczny i geometryczny cd. Układy równań liniowych. Interpretacja geometryczna. *Minima programowe:*
Interpretacja geometryczna układów równań liniowych to poziom rozszerzony.
Cel: Intuicje geometryczne związane z układami równań.

1. Dane są dwa ciągi geometryczne (a_n) i (b_n). Udowodnić, że ciąg $c_n := a_n b_n$ test też ciągiem geometrycznym. Znaleźć iloraz tego ciągu.

2. Ciąg (a, b, c) jest jednocześnie ciągiem arytmetycznym i geometrycznym. Znaleźć zależności między a, b, c

3. Wykazać, że jeżeli liczby dodatnie a, b, c tworzą ciąg geometryczny, to ich logarytmy tworzą ciąg arytmetyczny.

4. W rosnącym ciągu geometrycznym suma $2n$ początkowych wyrazów wynosi $S_{2n} = 63$ a suma $3n$ początkowych wyrazów $S_{3n} = 511$. Obliczyć S_n.

5. Udowodnić, że dla dowolnej liczby $N > 0$ i $N \neq 1$,
$\frac{1}{\log_2 N} + \frac{1}{\log_3 N} + \frac{1}{\log_4 N} + \cdots + \frac{1}{\log_{10} N} = \frac{1}{\log_{10!} N}$

6. Obliczyć $\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \cdots + \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)^n$

7. Ile może wynosić $0.9999999999\ldots$?

8. Zinterpretować geometrycznie układ nierówności: $\begin{cases} x + 2y < 1 \\ x - y \geqslant -1 \\ 2x - 4y + 1 < 0 \end{cases}$.

9. Rozwiązać układ równań $\begin{cases} (m-1)x + 2y = 1 \\ x + my = 1 \end{cases}$,
gdzie $m \in \mathbb{R}$ jest parametrem. Przeprowadzić dyskusję ze względu na m.

10. Dla jakich całkowitych wartości m rozwiązaniem układu: $\begin{cases} mx - y - 5 = 0 \\ 2x + 3my - 7 = 0 \end{cases}$,
jest para liczb dodatnich?

11. Znaleźć i narysować zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają warunek $|2x - y| = 2|x| - y$.

12. Na drodze 36m przednie koło pojazdu zrobiło o 6 obrotów więcej niż tylne. Gdyby obwód każdego koła był większy o 1 m to na tej samej drodze przednie koło wykonałoby o 3 obroty więcej niż tylne. Znaleźć obwody obu kół.