Projekt Fizyka Plus nr POKL.04.01.02-00-034/11 współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki.

Kurs Plus - Fizyka - wersja dla nauczyciela
Materiały na kurs zaawansowany

Przygotowanie: Piotr Nieżurawski, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego
e-mail: *Piotr.Niezurawski@fuw.edu.pl*

Gdy jestem pytany, dlaczego zajmuję się nauką, odpowiadam:
aby zaspokoić moją ciekawość, gdyż jestem z natury poszukiwaczem zrozumienia.
Jeśli nie zdziwiło cię coś przez cały dzień, to nie był on zbyt udany.
John A. Wheeler (1911–2008)

1 Zadanie - 7 ton

W trakcie akcji ratunkowej po wypadku w elektrowni jądrowej *Fukushima I* media doniosły, że pewnego dnia na reaktor zrzucono aż 7 ton wody. Oszacuj, na jakiej wysokości byłoby lustro wody, gdyby po uszczelnieniu sali, w której jesteście, wlano do niej tyle wody.

2 Zadanie - Wioślarz

Wioślarz płynie łodzią w górę rzeki. Gdy przepływał pod mostem, z jego łodzi wypadło koło ratunkowe. Po czasie $t = 15$ min wioślarz zauważył zgubę. Natychmiast zaczął płynąć w dół rzeki i dopędził zgubione koło w odległości $s = 1$ km od mostu. Obliczyć prędkość prądu rzeki, jeżeli wioślarz cały czas wiosłował z jednakowym wysiłkiem.
Proszę na początku rozwiązać zadanie w myślach, bez wypisywania wzorów.

Rozwiązanie

Względem wody szybkość wioślarza jest stała, więc płynął przez czas $2t = 30$ min. Prędkość nurtu

$$u = \frac{s}{2t} = 2 \text{ km/h}$$

3 Zadanie - Wioślarz'

Wioślarz płynie łodzią w górę rzeki. Gdy przepływał pod mostem, z jego łodzi wypadło koło ratunkowe. Po czasie $t = 15$ min wioślarz zauważył zgubę. Natychmiast zaczął płynąć w dół rzeki i dopędził zgubione koło w odległości $s = 1$ km od mostu. Obliczyć prędkość prądu rzeki, jeżeli wioślarz płynął **3 razy szybciej** względem wody w dół rzeki niż w górę rzeki.
Proszę na początku rozwiązać zadanie w myślach, bez wypisywania wzorów.

4 Zadanie - Egzamin u Fermiego

Oszacuj:

1. Liczbę pomieszczeń w budynku, w którym się znajdujesz.
2. Grubość śladu kredy na tablicy.
3. Czas potrzebny na wypłynięcie 1 m^3 wody z całkowicie odkręconego kranu.
4. Liczbę monet o nominale co najwyżej 2 gr znajdujących się w sali, w której odbywają się zajęcia.
5. Liczbę szkół podstawowych w Polsce.
6. Liczbę lekarzy i lekarzy dentystów w Polsce.
7. Utarg miesięczny warszawskiego taksówkarza.
8. Ładunek, który przepłynąłby podczas rozładowania baterii telefonów komórkowych uczestników zajęć.
9. Grubość arkusza papieru po jego 10-krotnym złożeniu (na pół, na pół itd.).
10. Ile metrów sześciennych wody wypijasz przez rok.

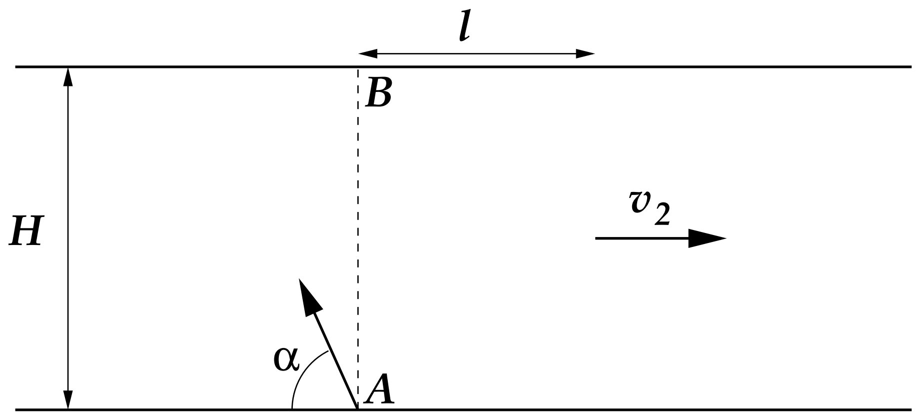
Wskazówki

Można próbować różnych podejść do każdego z problemów. W każdym przypadku wymaga to jednak pomnożenia kilku łatwiej oszacowanych liczb. Np. liczba godzin pracy taksówkarza, średnia prędkość, średnia długość trasy, stawka za kilometr, opłata początkowa itd. Część oszacowań łatwo sprawdzić (prostym eksperymentem, obserwacją lub w roczniku statystycznym).

5 Zadanie - Łódka (ukośnie względem brzegu)

Przewoźnik, który przeprawia się przez rzekę o szerokości H z punktu A, przez cały czas kieruje łódź pod kątem α względem brzegu rzeki (czyli między brzegiem a prostą przechodzącą przez dziób i środek rufy jest kąt α; Rys. 3). Wyznacz prędkość łódki względem wody $\vec{v}_1$, jeśli prędkość wody względem brzegu wynosi $\vec{v}_2$ (równoległa do brzegu), a łódkę zniosło na odległość l poniżej punktu B.

Rys. 3



Rozwiązanie

Prędkość łódki względem brzegu: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

W wybranym układzie współrzędnych:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= v_1[-\cos\alpha,\ \sin\alpha] \\ \vec{v}_2 &= v_2[1,\ 0]\end{aligned}$$

A więc: $\vec{v} = [v_2 - v_1\cos\alpha,\ v_1\sin\alpha]$

Przy warunku początkowym $\vec{r}(t=0) = [0,\ 0]$ równanie ruchu łódki:

$$\begin{aligned}x &= v_X t = (v_2 - v_1\cos\alpha)t \\ y &= v_Y t = v_1\sin\alpha t\end{aligned}$$

Łódka przepływa rzekę w czasie T, $y(t=T) = H$, i znajduje się o l poniżej punktu B, $x(t=T) = l$. Eliminując T z tych dwóch równań, otrzymujemy wartość prędkości łódki:

$$v_1 = v_2/(l\sin\alpha/H + \cos\alpha)$$

6 Zadanie – Osaczona mucha"

Mucha wystartowała z szyby samochodu w momencie, gdy znajdowała się w odległości $L = 10$ m od ściany domu (start muchy traktujemy jako jej pierwszy pobyt przy szybie). Samochód zaczął się wtedy poruszać i szyba zbliża się do ściany z prędkością $v = 3,6$ km/h. Oszalała mucha lata tam i z powrotem między szybą a ścianą z prędkością $u = 4$ m/s; owad porusza się zawsze po prostej prostopadłej do ściany i przechodzącej przez punkt startu na szybie. Samochód nagle zatrzymuje się, gdy szyba znajduje się w odległości $l = 1$ m od ściany.
a) Wykonaj rysunek, zaznaczając ścianę, szybę w odległościach L i l oraz początkowe położenie muchy.
b) Oblicz czas ruchu samochodu (t).
c) Oblicz drogę S, jaką przebyła mucha do momentu, gdy szyba znalazła się w odległości $l = 1$ m od ściany.
d) Oblicz, ile czasu mija między pierwszym i drugim pobytem muchy przy szybie t_{12} (zastanów się jaką drogę przebywa mucha między tymi chwilami).
e) Oblicz, ile czasu mija między kolejnymi pobytami muchy przy szybie, jeśli samochód dojeżdża aż do ściany ($l = 0$ m).

Rozwiązanie

b oraz c) Czas ruchu samochodu:

$$t_S = (L - l)/v$$

Droga, jaką przebyła mucha:

$$S_m = ut_S = u(L - l)/v$$

Wstawiając wartości:

$$S_m = 4\ \text{m/s}(10\ \text{m} - 1\ \text{m})/(3,6\ \text{km/h}) = 36\ \text{m}$$

d) Czas między startem (pierwszy pobyt przy szybie) i drugim pobytem przy szybie obliczam z równania:

(droga muchy) = 2 * (odległość szyby od ściany) - (droga szyby)

$$t_{12}u = 2L - t_{12}v$$

Otrzymuję:

$$t_{12} = \frac{2L}{u+v} = 4 \text{ s}$$

e) Oznaczenie:
Δt_k – czas między pobytem przy szybie o indeksie k (startem w przypadku $k = 1$) a pobytem o indeksie $k+1$

Zaczynamy od prostego przypadku. Czas między startem ($k = 1$, pierwszy pobyt przy szybie) i drugim pobytem przy szybie obliczam z równania: (droga muchy) = 2 * (odległość szyby) - (droga szyby)

$$\Delta t_1 u = 2L - \Delta t_1 v$$

Otrzymuję:

$$\Delta t_1 = \frac{2L}{u+v}$$

Czas między pobytem drugim i trzecim:

$$\Delta t_2 u = 2(L - \Delta t_1 v) - \Delta t_2 v$$

Między trzecim i czwartym:

$$\Delta t_3 u = 2[L - (\Delta t_1 + \Delta t_2)v] - \Delta t_2 v$$

Ogólnie:

$$\Delta t_{k+1} u = 2[L - (\Delta t_1 + ... + \Delta t_k)v] - \Delta t_{k+1} v$$

Mamy wzór rekurencyjny:

$$\Delta t_{k+1} = 2[L - (\Delta t_1 + ... + \Delta t_k)v]/(u+v)$$

Równanie ma postać:

$$\Delta t_{k+1} = A + B(\Delta t_1 + ... + \Delta t_k)$$

gdzie $A \equiv 2L/(u+v)$ oraz $B \equiv -2v/(u+v)$.

Obliczając kolejne interwały, możemy podać rozwiązanie.

Dla podanych wartości:

$$\begin{aligned} A &= 4 \text{ s} \\ B &= -2/5 = -0,4 \end{aligned}$$

Kilka pierwszych wyników:

$$\begin{aligned} \Delta t_1 &= 4 \text{ s} \\ \Delta t_2 &= 4 \text{ s} - 1,6 \text{ s} = 2,4 \text{ s} \\ \Delta t_3 &= 4 \text{ s} - 0,4 \cdot 6,4 \text{ s} = 1,44 \text{ s} \end{aligned}$$

Uzyskajmy postać zwartą. Oto kilka pierwszych wyników symbolicznych:

$$\begin{aligned}\Delta t_1 &= A\\ \Delta t_2 &= A + BA = A(1+B)\\ \Delta t_3 &= A + B(A + A(1+B)) = A(1+B)^2\end{aligned}$$

Sugeruje to rozwiązanie postaci:

$$\Delta t_k = A(1+B)^{k-1}$$

Można sprawdzić, że równanie rekurencyjne jest spełnione!

Do tego wyniku można też dojść w następujący sposób. Uzyskanemu równaniu rekurencyjnemu przypatrujemy się w dwóch odsłonach:

$$\begin{aligned}\Delta t_k &= A + B(\Delta t_1 + ... + \Delta t_{k-1})\\ \Delta t_{k-1} &= A + B(\Delta t_1 + ... + \Delta t_{k-2})\end{aligned}$$

Z drugiego równania otrzymujemy:

$$\Delta t_1 + ... + \Delta t_{k-2} = (\Delta t_{k-1} - A)/B$$

Wstawiamy ten wynik do pierwszego równania:

$$\Delta t_k = A + B[(\Delta t_{k-1} - A)/B + \Delta t_{k-1}]$$

I mamy znacznie prostsze równanie rekurencyjne

$$\Delta t_k = \Delta t_{k-1}(1+B)\ ,$$

które przy $\Delta t_1 = A$ prowadzi do postaci zwartej:

$$\Delta t_k = A(1+B)^{k-1}$$

Czy suma tych interwałów jest skończona? Czemu równa?

7 Zadanie - Wąż

Wychylenie węża w zależności od położenia x i czasu t jest opisane wzorem $y = A\sin(ax+bt+c)$, gdzie $a = 2\ \mathrm{m}^{-1}$, $b = 12\ \mathrm{s}^{-1}$ oraz $c = 26$. Oblicz długość tej fali λ, jej okres T oraz prędkość rozchodzenia v. Przyjmij przybliżenie $\pi \approx 3$.

Rozwiązanie

Należy zauważyć, że

$$\begin{aligned}a(x+\lambda) &= ax + 2\pi\\ b(t+T) &= bt + 2\pi\\ v &= \lambda/T\end{aligned}$$

8 Zadanie - Dwie kule*

Kula czerwona toczy się po płaskim stole z prędkością $\vec{v}_R$. Po tym samym stole toczy się również niebieska kula z prędkością $\vec{v}_N$, przy czym $v_R \neq v_N$. Tory kul się przecinają, ale kule nie zderzają się. Narysuj przykładowe wektory prędkości kul i ich położenia początkowe. Wyznacz położenie kul w chwili, gdy odległość między nimi będzie najmniejsza. Zadanie rozwiąż
a) graficznie (*warto rozpatrzyć ruch w układzie związanym z jedną z kul*),
b) analitycznie.

9 Zadanie - Rozmiar i wiek Wszechświata

Prawo Hubble'a głosi, że galaktyki oddalają się od siebie z prędkością v proporcjonalną do ich wzajemnej odległości d

$$v = Hd \ ,$$

gdzie $H \approx 2 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{s}^{-1}$. Zakładając, że Wszechświat powstał w punkcie i rozszerzał się z prędkością światła zgodnie z przedstawionym równaniem, oszacuj promień Wszechświata i jego wiek.

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} v &= c \\ d_W &\approx c/H = 1,5 \cdot 10^{26}\ \mathrm{m} \\ t_W &\approx d_W/c = H^{-1} = 5 \cdot 10^{17}\ \mathrm{s} = 16\ \text{mld lat} \end{aligned}$$

10 Zadanie – Wstęp do ekonofizyki ;-)

Nominalne oprocentowanie lokaty bankowej w skali roku wynosi p. Oznacza to, że gdyby kapitalizacja nastąpiła po roku, kwota zwiększyłaby się $(1 + p)$ razy. Ale kapitalizacja odsetek następuje na koniec każdego miesiąca (oprocentowanie bank dzieli wtedy po równo – na każdy miesiąc przypada $p/12$). Oblicz efektywne oprocentowanie lokaty po 1 roku. Uzyskaj również wynik liczbowy, jeśli $p = 6\%$.
Dla zainteresowanych: Uzyskaj wynik przy codziennej kapitalizacji. Oblicz $e^{6\%}$.

Rozwiązanie

Oprocentowanie w skali miesiąca jest równe

$$p/12$$

Jeśli na początku mamy na lokacie kwotę m_0, to po pierwszym miesiącu na lokacie jest

$$m_1 = m_0(1 + \frac{p}{12})$$

Po roku

$$m_{12} = m_0(1 + \frac{p}{12})^{12}$$

Czyli efektywne oprocentowanie wynosi

$$(1 + \frac{p}{12})^{12} - 1$$

Jeśli $p = 6\%$, to

$$(1 + \frac{p}{12})^{12} - 1 = 1,005^{12} - 1 \approx 1.0617 - 1 = 6,17\%$$

11 Zadanie - Ruch jednostajnie przyśpieszony

W pewnym układzie kartezjańskim (np. związanym z ziemią) wektor położenia $\vec{r}$ małego kamyka zależy od czasu t następująco:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}_0(t - t_0)^2 \ ,$$

gdzie wektory $\vec{r}_0, \ \vec{v}_0, \ \vec{a}_0$ są stałe (czyli nie zależą od czasu).

Jakie jest znaczenie stałej t_0?
Wychodząc z definicji prędkości

$$\vec{v}(t) = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \qquad \text{przy} \ \ \Delta t \to 0$$

oraz przyśpieszenia

$$\vec{a}(t) = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \qquad \text{przy} \ \ \Delta t \to 0 \ ,$$

oblicz prędkość oraz przyśpieszenie kamyka.

Rozwiązanie

Znaczenie t_0:

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$$

Prędkość:

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{v}_0\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}_0[(t + \Delta t - t_0)^2 - (t - t_0)^2]}{\Delta t} = \vec{v}_0 + \frac{1}{2}\vec{a}_0[2(t - t_0) + \Delta t] = \vec{v}_0 + \vec{a}_0(t - t_0) \quad \text{przy} \ \ \Delta t \to 0$$

Przyśpieszenie:

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{a}_0\Delta t}{\Delta t} = \vec{a}_0 \quad \text{przejście} \ \Delta t \to 0 \ \text{niczego nie zmienia}$$

Powtarzamy rachunek, używając oznaczeń pochodnych:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0(t - t_0) \\ \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_0 \end{aligned}$$

12 Zadanie - Rzut o ścianę’

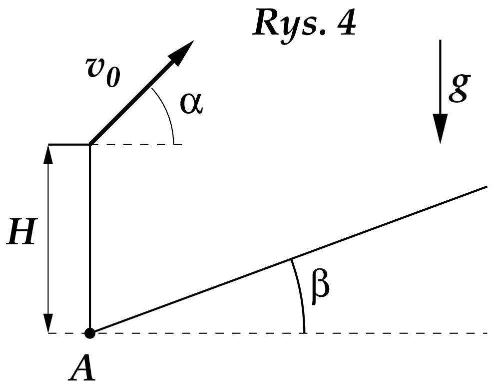
Z wysokości $h = 20$ m wyrzucono w kierunku poziomym ciało z prędkością $v_0 = 20$ m/s. W odległości $d = 30$ m znajduje się pionowa ściana. Oblicz, na jakiej wysokości ciało uderzyło w ścianę oraz w jakiej odległości od ściany upadło na podłogę, jeśli wiadomo, że odbiło się od ściany idealnie sprężyście.

Wskazówka

Odległość od ściany najłatwiej obliczyć, obliczając zasięg ciała i odejmując d, gdyż tor po odbiciu będzie lustrzanym odbiciem toru „za ścianą”, bez odbicia.

13 Zadanie - Wieża i stok

Piłkę wyrzucono z wieży o wysokości H z prędkością v_0 skierowaną pod kątem α do poziomu. Podnóże wieży jest nachylone pod kątem β do poziomu (Rys. 4).
W wybranym układzie współrzędnych uzyskaj równanie na jedną ze współrzędnych miejsca upadku piłki.
W szczególnym przypadku $\beta = \alpha$ rozwiąż to równanie; oblicz drugą współrzędną miejsca upadku i jego odległość od punktu A.



14 Zadanie - Przepaść

Do przepaści spada kulka. Uderzenie o dno usłyszano po czasie $t = 4$ s. Oblicz głębokość przepaści, jeżeli prędkość głosu w powietrzu $v = 340$ m/s, przyspieszenie ziemskie $g = 9,81$ m/s^2, a opór powietrza pomijamy.

15 Zadanie - Zmienne przyśpieszenie

W pewnym układzie kartezjańskim (np. związanym z ziemią) wektor położenia $\vec{r}$ małego kamyka zależy od czasu t następująco:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{b}_0(t - t_0)^3 \ ,$$

gdzie wektory $\vec{r}_0, \ \vec{b}_0$ są stałe.
Jakie jest znaczenie stałej t_0?
Wychodząc z definicji prędkości

$$\vec{v}(t) = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \qquad \text{przy } \ \Delta t \to 0$$

oraz przyśpieszenia

$$\vec{a}(t) = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \qquad \text{przy } \ \Delta t \to 0 \ ,$$

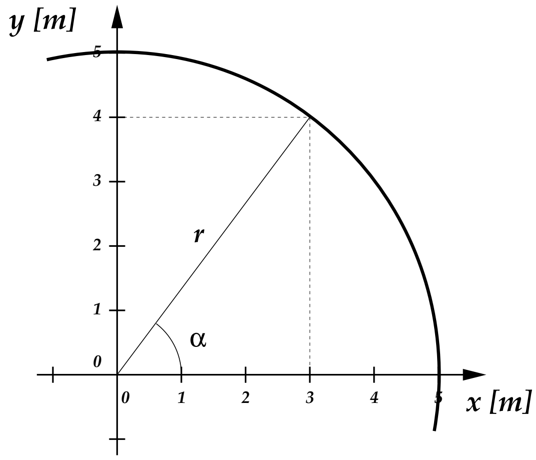
oblicz prędkość i przyśpieszenie kamyka.

16 Zadanie - Ruch po okręgu, przyśpieszenie dośrodkowe

Punkt materialny porusza się po okręgu o promieniu R. Wartość prędkości kątowej wynosi ω i jest stała. Napisz parametryczne równanie toru.
Narysuj wektor prędkości w kilku punktach toru i określ zależność składowych prędkości od czasu.
Rozpatrując zmianę wektora prędkości w bardzo krótkim przedziale czasu, określ kierunek, zwrot i wartość przyśpieszenia punktu materialnego.

Rozwiązanie

Parametryczne równanie toru.



$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\alpha \\
y &= r\sin\alpha
\end{aligned}
$$

Z treści wiadomo, że

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \omega = \text{const.}$$

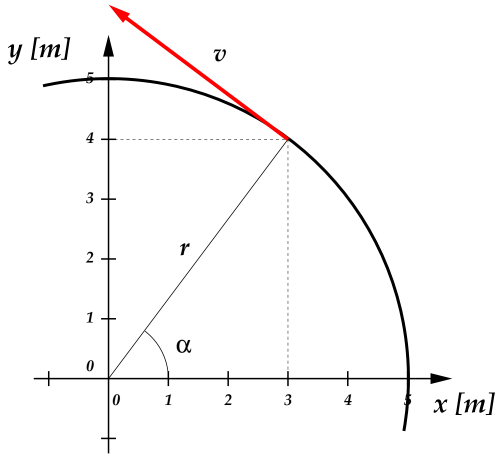
A więc

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega(t - t_0)$$

analogicznie jak położenie x (odpowiednik α) w ruchu ze stałą prędkością v (odpowiednik ω). Jeśli wybierzemy sobie $t_0 = 0$ oraz $\alpha_0 = 0$ (czyli w chwili $t = 0$ punkt jest na dodatniej półosi X), to dostaniemy:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= r\cos(\omega t) \\
y(t) &= r\sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

Wektor prędkości ciała poruszającego się po gładkiej krzywej jest zawsze styczny do tej krzywej. Wynika to z definicji stycznej: Styczna do krzywej w pewnym punkcie A to prosta przechodząca przez dwa punkty należące do krzywej, gdy dążą one do punktu A.

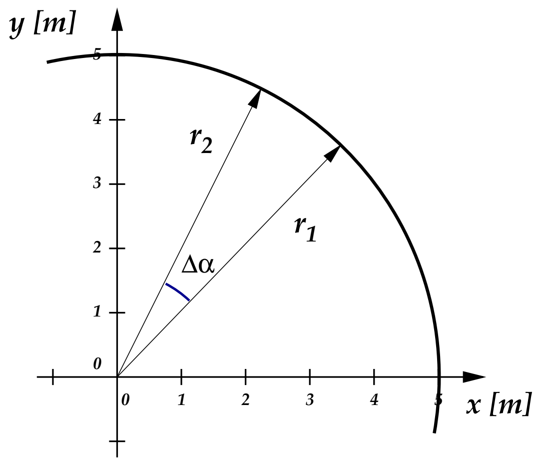


Wektor prędkości zależy więc od czasu następująco:

$$v_X(t) = -v \sin\alpha = -v \sin(\omega t)$$
$$v_Y(t) = v \cos\alpha = v \cos(\omega t)$$

Obliczamy wartość prędkości liniowej:

$$v = |\vec{v}| = |\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}| = |\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t}| \quad \text{przy} \;\; \Delta t \to 0$$



Dla bardzo małych fragmentów okręgu

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \approx r\,\Delta\alpha \quad \text{przy} \;\; \Delta t \to 0$$

(im mniejsza długość wektorów przesunięcia, tym lepiej suma ich długości określa drogę).

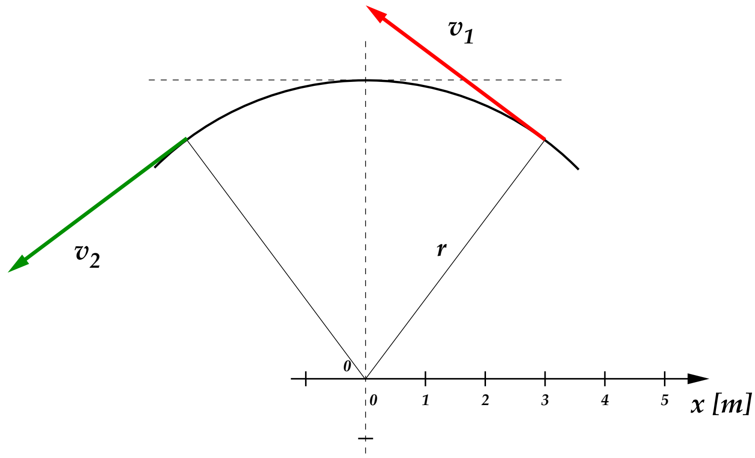
Otrzymujemy wartość prędkości liniowej:

$$v = |\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t}| = \frac{r\,\Delta\alpha}{\Delta t} = r\omega \quad \text{przy} \;\; \Delta t \to 0$$

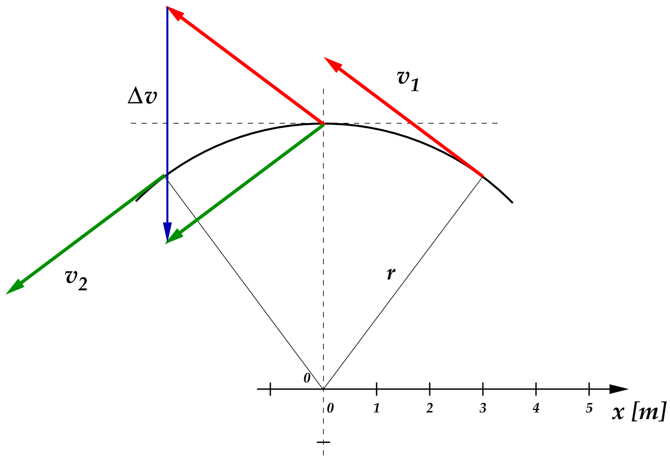
Wynik ten uzyskujemy również obliczając szybkość (dla dowolnego przedziału czasu):

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{r\,\Delta\alpha}{\Delta t} = r\omega$$

Aby określić przyśpieszenie, rozpatruję zmianę wektora prędkości $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ między punktami symetrycznymi względem osi Y:



Przenoszę te wektory na punkt pośrodku (przy zmniejszaniu Δt to dla tego punktu określimy przyśpieszenie) i wyznaczam $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$:



Kierunek $\Delta\vec{v}$ jest prostą między punktem pośrodku punktów 1 i 2 a środkiem okręgu (kierunek osi Y w tym wypadku); zwrot jest do środka okręgu. Nie zmieni się to przy zmniejszaniu długości łuku między punktami, w których mierzymy prędkości. Takie własności będzie mieć więc wektor przyśpieszenia. Możemy zapisać:

$$\vec{a} = a\frac{-\vec{r}}{r}$$

czyli

$$\begin{aligned} a_X(t) &= -a\cos(\omega t) \\ a_Y(t) &= -a\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Obliczamy wartość przyśpieszenia (analogicznie do wartości prędkości):

$$a = |\vec{a}| = |\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}| = |\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}| \quad \text{przy} \;\; \Delta t \to 0$$

Dla bardzo małych fragmentów okręgu

$$|\vec{v}_2 - \vec{v}_1| \approx v\,\Delta\alpha \quad \text{przy} \;\; \Delta t \to 0$$

Otrzymujemy wartość przyśpieszenia:

$$a = \frac{v\,\Delta\alpha}{\Delta t} = v\omega \quad \text{przy} \;\; \Delta t \to 0$$

Jeśli ktokolwiek ze studentów uczył się już o pochodnych... Zastosowanie rachunku różniczkowego.

Prędkość:

$$\begin{aligned} v_X = \frac{dx}{dt} &= r\frac{d}{dt}\cos\alpha = -r\sin\alpha\frac{d}{dt}\alpha = -r\omega\sin(\omega t) \\ v_Y = \frac{dy}{dt} &= r\frac{d}{dt}\sin\alpha = r\cos\alpha\frac{d}{dt}\alpha = r\omega\cos(\omega t) \end{aligned}$$

Przyśpieszenie:

$$\begin{aligned} a_X = \frac{dv_X}{dt} &= -r\omega\frac{d}{dt}\sin\alpha = -r\omega\cos\alpha\frac{d}{dt}\alpha = -r\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 x \\ a_Y = \frac{dv_Y}{dt} &= r\omega\frac{d}{dt}\cos\alpha = -r\omega\sin\alpha\frac{d}{dt}\alpha = -r\omega^2\sin(\omega t) = -\omega^2 y \end{aligned}$$

17 Zadanie - Wagi na Księżycu

Ile będzie ważył człowiek o masie 75 kg na powierzchni Księżyca, jeśli gęstość Księżyca $\rho_K = 0{,}6\,\rho_{Ziemi}$, zaś promień Księżyca $R_K = 0{,}27\,R_{Ziemi}$ (podaj wartość siły ciężkości)? Co wskaże sprężynowa waga wyskalowana w kilogramach (kalibrowana na Ziemi)? Co wskaże waga szalkowa?

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} g_K &= GM_K/R_K^2 \\ &= 0.27\cdot 0.6\cdot g_Z \\ &\approx 1.6\ \text{m/s}^2 \\ Q &= mg_K \\ &\approx 120\ \text{N} \end{aligned}$$

Wskazanie wagi sprężynowej:

$$Q/g_Z \approx 12\ \text{kg}$$

Waga szalkowa oczywiście wskaże poprawnie masę.

18 Zadanie - Satelita geostacjonarny

Oblicz wysokość nad poziomem morza, na jakiej powinien znajdować się satelita geostacjonarny. *Potrzebne dane znajdziesz na maturalnej karcie stałych i wzorów z fizyki.*

Rozwiązanie

Siła dośrodkowa = siła grawitacji

$$mv^2/r = GM_Z m/r^2\ ,$$

gdzie

$$\begin{aligned} v &= 2\pi r/T \\ T &= 24 \text{ h} = 86400 \text{ s} \\ r &= R_Z + h \end{aligned}$$

Po przekształceniach otrzymujemy znajomy wzór:

$$r^3 = T^2 G M_Z/(4\pi^2)$$

Wynik:

$$\begin{aligned} h &= \sqrt[3]{T^2 G M_Z/(4\pi^2)} - R_Z \\ &\approx \sqrt[3]{7{,}567 \cdot 10^{22}} \text{ m} - 6370 \text{ m} \\ &\approx (42{,}3 \cdot 10^6 - 6370) \text{ m} \approx 42000 \text{ km} \end{aligned}$$

19 Zadanie - Analiza wymiarowa

Rozważając tylko wymiary istotnych wielkości, zaproponuj zależność

1. prędkości v [m/s] od przyśpieszenia a [m/s^2] i czasu t [s].
2. okresu wahadła T [s] od przyśpieszenia ziemskiego g [m/s^2] i długości wahadła l [m].
3. masy kuli m [kg] od jej promienia R [m] i gęstości materiału ρ [kg/m^3].
4. długości fali λ [m] od jej prędkości v [m/s] i częstości f [Hz].
5. ciśnienia hydrostatycznego p [Pa] od przyśpieszenia ziemskiego g [m/s^2], głębokości cieczy h [m] i jej gęstości ρ [kg/m^3].
6. okresu wahadła T [s] od współczynnika sprężystości k [N/m] i masy wahadła m [kg].
7. prędkości fali wodnej (na płytkiej wodzie) od przyśpieszenia ziemskiego g [m/s^2], głębokości wody h [m].
8. prędkości fali wodnej (na głębokiej wodzie) od przyśpieszenia ziemskiego g [m/s^2] i długości fali λ [m].
9. ciśnienia dynamicznego p_d [Pa] od prędkości cieczy v [m/s] i jej gęstości ρ [kg/m^3].
10. prędkości fali na strunie od napięcia struny T [N], masy struny m [kg] i jej długości l [m].
11. siły oporu aerodynamicznego F [N] działającego na ciało od powierzchni przekroju poprzecznego ciała S [m^2], poruszającego się z prędkością v [m/s] względem ośrodka o gęstości ρ [kg/m^3].
12. mocy wiatru P [W] od powierzchni S [m^2], przez którą wiatr wieje, prędkości wiatru v [m/s] i gęstości powietrza ρ [kg/m^3].
13. okresu precesji bąka T_p [s] od okresu jego obrotu względem osi symetrii T [s], momentu bezwładności bąka względem tej osi I [kg m^2] i momentu siły grawitacyjnej działającej na bąk M [N m]. *Która propozycja jest lepsza?*

Załóż, że poza wymienionymi wielkościami prawdziwe równanie może zawierać jedynie bezwymiarowe liczby, których nie musisz uwzględniać w proponowanej zależności.

20 Zadanie - Łączenie sprężyn

Oblicz współczynnik sprężystości układu zbudowanego z dwóch sprężyn
a) połączonych szeregowo ($--$),
b) połączonych równolegle ($=$, tak że rozciągnięcie każdej ze sprężyn jest takie samo),
jeśli pierwsza sprężyna ma współczynnik sprężystości k_1, a druga k_2.

Rozwiązanie

a) Przy połączeniu szeregowym, ciągniemy koniec drugiej sprężyny z siłą F, co powoduje jej rozciągnięcie o $x_2 = F/k_2$. Ponieważ suma sił działających na sprężynę musi być równa 0 (sprężyna nieważka, a jeśli ważka, to zakładamy dla uproszczenia, że spoczywa - wnioski z II zasady dynamiki), więc pierwsza sprężyna musi działać na drugą siłą o wartości również F. Z III zasady dynamiki wnioskujemy, że druga sprężyna działa na pierwszą również siłą o wartości F. Wydłużenie pierwszej sprężyny jest równe więc $x_1 = F/k_1$. Współczynnik sprężystości musi spełniać

$$F = kx \ ,$$

gdzie x jest wartością całkowitego wydłużenia $x = x_1 + x_2 = F/k_1 + F/k_2$. Stąd:

$$F = (\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2})^{-1} x$$

Wypadkowy współczynnik sprężystości:

$$k_{szer} = (\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2})^{-1}$$

przy łączeniu szeregowym jest zawsze mniejszy od współczynnika każdej z dwóch łączonych sprężyn.

b) Aby rozciągnąć pierwszą sprężynę o x, należy działać siłą o wartości $F_1 = k_1 x$. Podobnie w przypadku drugiej sprężyny: $F_2 = k_2 x$. Na układ równolegle połączonych sprężyn należy więc działać siłą $F = F_1 + F_2$:

$$F = (k_1 + k_2)x \ ,$$

a więc

$$k_{równ} = k_1 + k_2$$

Otrzymujemy więc wynik zgodny z intuicją.

21 Zadanie - Oscylator tłumiony *

Oblicz prędkość i przyśpieszenie ciężarka, którego położenie na osi X jest opisane równaniem

$$x(t) = A\, e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \phi) \ ,$$

gdzie A, λ, ω, ϕ są pewnymi stałymi. Wyraź przyśpieszenie jako funkcję prędkości i położenia.

22 Zadanie - Prędkość i przyśpieszenie w ruchu jednostajnym *

Udowodnij, że wartość prędkości punktu materialnego jest stała wtedy i tylko wtedy, gdy jego przyśpieszenie jest prostopadłe do prędkości albo wartość przyśpieszenia wynosi 0.

Wskazówka: Oblicz szybkość, z jaką zmienia się wartość wyrażenia $\vec{v} \cdot \vec{v}$ czyli v^2.

Rozwiązanie

Rozpatrujemy interwał czasu różny od zera, np. całą minutę lub sekundę ruchu i w dowolnym punkcie w tym interwale (ściśle: bez brzegów) mają zachodzić równości.

$$\begin{array}{rcl} v = \textbf{const} & \Leftrightarrow & v^2 = \textbf{const} \\ \dfrac{dv}{dt} = 0 & \Leftrightarrow & \dfrac{d(v^2)}{dt} = 0 \quad \textbf{w całym interwale} \\ v^2 & = & \vec{v} \cdot \vec{v} \\ \dfrac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} & = & \dfrac{d(\vec{v})}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \dfrac{d(\vec{v})}{dt} = 2\vec{v} \cdot \dfrac{d(\vec{v})}{dt} \end{array}$$

Czyli mamy

$$\frac{d(v^2)}{dt} = 2\vec{v} \cdot \vec{a}$$

Ale lewa strona jest równa 0, więc takoż i prawa.

23 Zadanie - Część i całość *

Student otrzymał zadanie obliczenia siły, jaką jedna półkula jednorodnej kuli działa na drugą półkulę. Po wielu bezsennych nocach doszedł do wniosku, że musi skorzystać z następującego twierdzenia:

Zbiór Z punktów materialnych jest sumą dwóch rozłącznych zbiorów punktów materialnych: A oraz B. Jeśli oddziaływania między punktami materialnymi spełniają III zasadę dynamiki, to siła, jaką działa zbiór punktów B na zbiór punktów A, jest równa sile, jaką działa zbiór punktów Z na zbiór punktów A.

Udowodnij to twierdzenie.

Rozwiązanie

$$\vec{F}_{AB} = \sum_{i \in A} \sum_{j \in B} \vec{F}_{ij}$$

$$\begin{array}{rcl} \vec{F}_{AZ} & = & \displaystyle\sum_{i \in A} \sum_{j \in Z} \vec{F}_{ij} = \sum_{i \in A} \sum_{j \in A \cup B} \vec{F}_{ij} = \sum_{i \in A} (\sum_{j \in A} \vec{F}_{ij} + \sum_{j \in B} \vec{F}_{ij}) = \\ & = & \displaystyle\sum_{i \in A} \sum_{j \in A} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{AB} \end{array}$$

Pozostaje dowieść oczywistego faktu (inaczej mielibyśmy do czynienia z samonapędzającymi się ciałami), że

$$\sum_{i \in A} \sum_{j \in A} \vec{F}_{ij} = 0 \ ,$$

do czego wykorzystuję dowolność indeksowania, przemienność dodawania i III zasadę dynamiki:

$$\sum_{i\in A}\sum_{j\in A}\vec{F}_{ij} = \sum_{j\in A}\sum_{i\in A}\vec{F}_{ji} = \sum_{i\in A}\sum_{j\in A}\vec{F}_{ji} = \sum_{i\in A}\sum_{j\in A}(-\vec{F}_{ij})$$

Wobec tego:

$$2\sum_{i\in A}\sum_{j\in A}\vec{F}_{ij} = 0 \ ,$$

co kończy dowód.

24 Zadanie - L-bryła

Z czterech identycznych, jednorodnych sześcianów zbudowano bryłę w kształcie litery L. Wyznacz położenie środka ciężkości takiej bryły.

25 Zadanie - Kula z wydrążeniem

W ołowianej kuli o promieniu $a = 20$ cm znajduje się kuliste wydrążenie o promieniu $b = 3$ cm. Odległość między środkiem kuli a środkiem wydrążenia wynosi $d = 10$ cm. Znajdź położenie środka masy tej bryły.

Rozwiązanie

Zauważamy, że środek masy całkowicie wypełnionej kuli pokrywa się z jej środkiem geometrycznym. Możemy wobec tego napisać:

$$\vec{R}_K = (\vec{R}_{KzW}M + \vec{R}_W m)/(M+m),$$

gdzie $\vec{R}_K$ jest środkiem masy pełnej kuli o masie $M+m$;
$\vec{R}_{KzW}$ szukanym położeniem środka masy wydrążonej kuli o masie M;
$\vec{R}_W$ środkiem masy „wyjętej” kuli o promieniu b i masie m.

Umieszczam punkt 0 osi X w geometrycznym środku kuli o promieniu a. Niech oś X przechodzi przez geometryczny środek wydrążenia. Wobec tego: $\vec{R}_K = 0$ oraz $\vec{R}_W = d\hat{e}_X$. Otrzymane wcześniej równanie przybiera w tym układzie postać:

$$0 = (\vec{R}_{KzW}M + d\hat{e}_X m)/(M+m)$$

Wobec tego:

$$\vec{R}_{KzW} = -d\frac{m}{M}\hat{e}_X$$

Stosunek mas jest równy stosunkowi objętości: $m/M = b^3/(a^3-b^3)$. A więc środek masy znajduje się w odległości

$$db^3/(a^3-b^3) \approx 0.3 \text{ mm}$$

od geometrycznego środka kuli o promieniu a i po przeciwnej jego stronie niż środek wydrążenia.

26 Zadanie - Trójkąt z płyty

Wierzchołki wyciętego z jednorodnej płyty trójkąta mają w pewnym układzie kartezjańskim współrzędne: $(0,\,0)$; $(x_2,\,0)$ oraz $(0,\,y_3)$. Wyznacz równania środkowych oraz położenie środka masy tej figury.

Rozwiązanie

Środkowa A przechodząca przez wierzchołek $(0,\,0)$ przechodzi przez środek odcinka między punktami $(x_2,\,0)$ oraz $(0,\,y_3)$, czyli przez punkt

$$(\frac{x_2+0}{2},\,\frac{0+y_3}{2})$$

Wobec tego jej równanie ma postać

$$y_A = \frac{y_3}{x_2}x$$

Równanie środkowej przechodzącej przez wierzchołek $(x_2,\,0)$:

$$y_B = -\frac{y_3}{2x_2}x + \frac{y_3}{2}$$

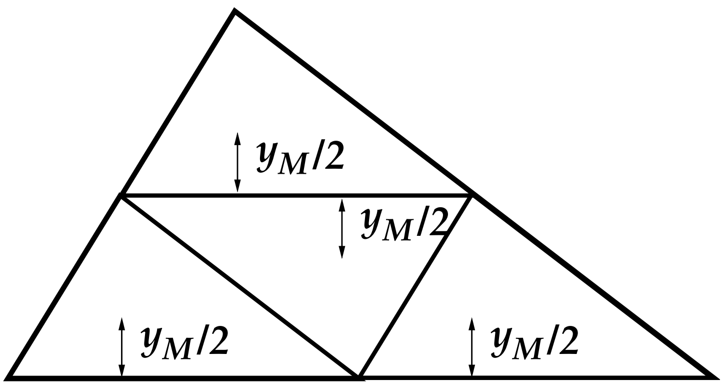
Równanie środkowej przechodzącej przez wierzchołek $(0,\,y_3)$:

$$y_C = -\frac{2y_3}{x_2}x + y_3$$

Środek masy znajduje się w punkcie przecięcia środkowych, co można łatwo pokazać, dzieląc trójkąt na paski równoległe do jednego z boków (każdy pasek ma środek masy w połowie długości). Punkt ten ma współrzędne

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{1}{3}x_2 \\ y_M &= \frac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$

Studentów można zachęcić do uzyskania wyniku dla dowolnego trójkąta. Proszę też zaprezentować piękną metodę wyznaczenia odległości środka masy od boku trójkąta poprzez podział trójkąta na np. 4 trójkąty podobne:



Odległość środka masy dużego trójkąta od podstawy:

$$y_M = \frac{2\frac{1}{2}y_M\frac{1}{4}m + (\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}y_M)\frac{1}{4}m + (\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}y_M)\frac{1}{4}m}{4\frac{1}{4}m}\,,$$

gdzie h jest wysokością dużego trójkąta. Wobec tego:

$$y_M = \frac{1}{3}h$$

27 Zadanie - Trapez z płyty

Wierzchołki wyciętego z jednorodnej płyty trapezu mają w pewnym układzie kartezjańskim współrzędne: $(0,\ 0)$; $(x_2,\ 0)$; $(0,\ h)$ oraz $(x_4,\ h)$. Wyznacz położenie środka masy tej figury.

Wskazówki

Dzielimy trapez albo na dwa trójkąty, albo na trójkąt i prostokąt.

28 Zadanie - Niemożliwa bryła

Czy można skonstruować taki wielościan wypukły, aby przez żadną ze ścian nie przechodziła prosta zawierająca środek masy wielościanu i prostopadła do płaszczyzny zawierającej daną ścianę? Jak zachowywałby się taki wielościan?

29 Zadanie - Most wysuwany

Dysponujesz tylko 100 identycznymi deskami, każda ma długość $l = 3$ m. Jedną kładziesz na poziomym boisku. Kolejne kładzione deski nie mogą dotknąć powierzchni boiska. Oblicz maksymalną możliwą, mierzoną w poziomie długość konstrukcji. Rozważ różne pomysły konstruktorskie.

30 Zadanie - Zachowanie pędu

Układ wielu punktów materialnych jest izolowany. Oddziaływania między punktami materialnymi spełniają III zasadę dynamiki. Udowodnij, że całkowity pęd układu jest zachowany.

Rozwiązanie

Równanie ruchu

$$\dot{\vec{p}}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}$$

Nie musimy dodawać, że $j \neq i$, bo $\vec{F}_{ii} = 0$. Całkowity pęd $\vec{P} \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$, więc:

$$\dot{\vec{P}} = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{p}}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij}$$

Ale:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{ji} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ji} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} (-\vec{F}_{ij}) \ ,$$

gdzie wykorzystałem dowolność indeksowania, przemienność dodawania i III zasadę dynamiki. Wobec tego:

$$2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} = 0$$

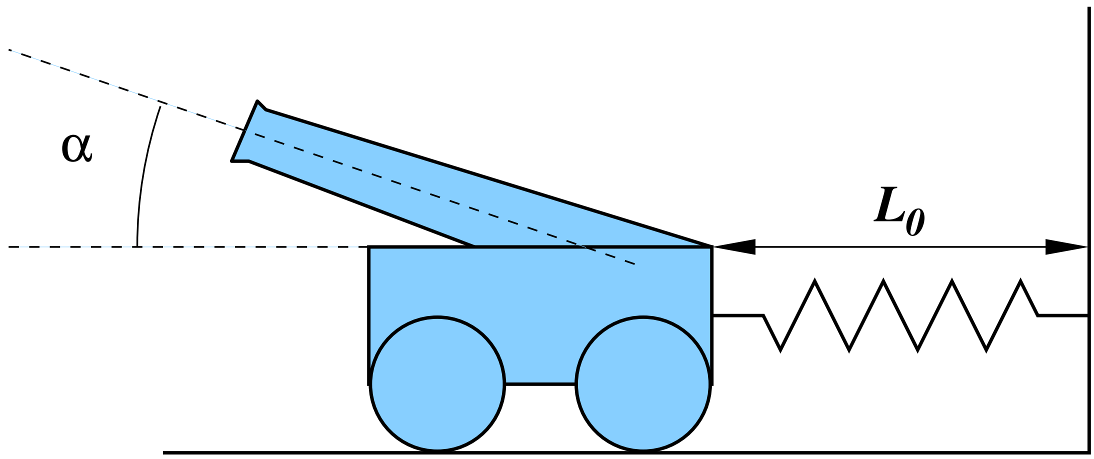
i otrzymujemy

$$\dot{\vec{P}} = 0 \ ,$$

co kończy dowód.

31 Zadanie - Armata

Armatę przymocowano do ściany za pomocą poziomo położonej sprężyny o współczynniku sprężystości k oraz długości swobodnej L_0. Armata może poruszać się bez tarcia w poziomie. Początkowo armata spoczywa. Po wystrzale masa armaty równa się M_A, a początkowa prędkość i masa wystrzelonego pod kątem α do poziomu pocisku wynoszą odpowiednio v_P i m_P. Ile wynosi minimalna długość sprężyny, do której ściśnie ją armata? Czy armata uderzy o ścianę, jeśli $k = 10^3$ N/m, $L_0 = 50$ cm, $M_A = 10^3$ kg, $\alpha = 60°$, $v_P = 400$ m/s, $m_P = 2$ kg? Zaniedbać pęd gazów powstałych w trakcie wystrzału.



Rozwiązanie

Zasada zachowania pędu dla składowej poziomej (*A* - armata; *P* - pocisk): $p_{Ax} + p_{Px} = 0$
Jeśli przyjmiemy: $p_{Ax} = -v_A M_A$ oraz $p_{Px} = v_P m_P \cos\alpha$, to otrzymujemy:

$$v_A = v_P m_P \cos\alpha / M_A$$

Początkowa energia kinetyczna armaty, $E_i = M_A v_A^2/2$, zamienia się w energię potencjalną sprężyny (warunek maksymalnego ściśnięcia), $E_f = k(l - L_0)^2/2$, gdzie l jest długością sprężyny przy maksymalnym ściśnięciu, więc jej długością minimalną.
Równanie $E_i = E_f$ prowadzi do warunku: $l = L_0 - v_A\sqrt{M_A/k}$
Odpowiedź: Minimalna długość sprężyny wynosi:

$$l = \max(0;\ L_0 - v_P m_P \cos\alpha/\sqrt{M_A k})$$

Jeśli $k = 10^3$ N/m, $L_0 = 50$ cm, $M_A = 10^3$ kg, $\alpha = 60°$, $v_P = 400$ m/s, $m_P = 2$ kg, to:

$$l = 10\,\mathrm{cm}$$

a więc armata nie uderzy o ścianę.

32 Zadanie - Woda z lodem i ołowiem

Ołowianą kulę o masie $m = 4$ kg zatopiono w lodowej kuli. Lodową kulę z zatopioną ołowianą kulą włożono do częściowo wypełnionego wodą, prostopadłościennego akwarium, którego poziome dno ma powierzchnię $S = 2$ m^2. Początkowo lodowa kula z zatopioną ołowianą kulą pływała w wodzie. Gęstość ołowiu $\rho_o = 11340$ kg/m^3, gęstość wody $\rho_w = 1000$ kg/m^3.

a) Co stanie się z ołowianą kulą, gdy lód stopnieje?

b) Czy poziom wody w akwarium podniesie się, czy obniży, gdy lód stopnieje?

c) Oblicz, o ile zmieni się wysokość lustra wody, gdy lód stopnieje.

33 Zadanie - Beczka i deszcz

Przez czas $T = 10$ h padał pionowo deszcz o natężeniu $j = 0{,}1$ kg/(m^{2}h). Oblicz, ile wody zebrała stojąca pionowo beczka, której poziomy otwór ma powierzchnię $S = 1$ m^2. Ile wody byłoby w beczce po tym samym deszczu, gdyby beczka była przechylona tak, że jej oś tworzyłaby kąt α z pionem?

Odpowiedź

Masa wody zebranej w pionowo stojącej beczce:

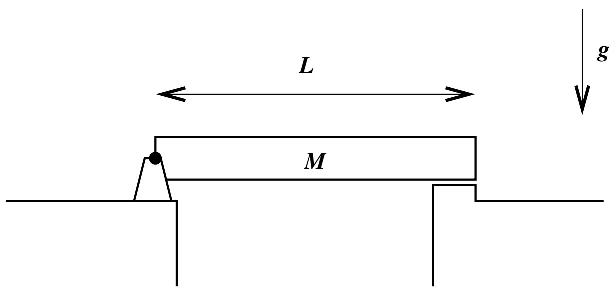
$$M = jST = 1\,\mathrm{kg}$$

Jeśli beczkę przechylimy pod kątem α do pionu (otwór jest wtedy pod kątem α do poziomu), to powierzchnia otworu beczki „widziana” przez deszcz – czyli rzut tej powierzchni na płaszczyznę poziomą – będzie równa $S\cos\alpha$. A więc masa wody zebranej w przechylonej beczce:

$$M = jS\cos\alpha T = \cos\alpha \text{ kg}$$

34 Zadanie - Właz

Prostopadłościenna, jednorodna płyta o masie M przykrywa właz do schronu. Płyta spoczywa poziomo, jej długość wynosi L, a z jednej strony jest przymocowana do włazu za pomocą mocnego zawiasu (rysunek). Ile trotylu należy zużyć, aby otworzyć trwale wejście, jeśli wiadomo, że efektywność zamiany energii wybuchu na energię kinetyczną płyty wynosi ϵ? Właz posiada mechanizm zabezpieczający przed powrotem płyty po odbiciu się jej od podłogi. Stosunek energii powstającej w wybuchu trotylu do jego masy wynosi ok. $w = 4$ MJ/kg. Uzyskać wynik liczbowy w przypadku, gdy $L = 3$ m, $M = 800$ kg, $\epsilon = 10\%$, $g = 10$ m/s^2.



Rozwiązanie

Bilans energetyczny:

Energia początkowa: $E_i = E_{trot}$ - energia uzyskana z wybuchu trotylu.

Minimalna potrzebna energia końcowa:$\min(E_f) = MgL/2$ - płyta zatrzymuje się w pionie.

Z warunku $E_i \geq \min(E_f)$ otrzymuję:

$$m_{trot} w\epsilon \geq MgL/2$$

Czyli masa ładunku powinna spełniać:

$$m_{trot} \geq MgL/(2w\epsilon)$$

W przypadku, gdy $L = 3$ m, $M = 800$ kg, $\epsilon = 10\%$, $g = 10$ m/s^2 oraz $w = 4$ MJ/kg:

$$m_{trot} \geq 0.03\,\mathrm{kg}$$

35 Zadanie - Lodowiec

Po zboczu góry bardzo powoli zsuwa się lodowiec o masie początkowej M. Podczas tego ruchu część lodowca o masie m ulegnie stopnieniu na skutek tarcia o podłoże. Jaka część tego lodowca (jaki stosunek m/M) ulegnie stopnieniu w trakcie ruchu po zboczu, jeśli założyć, że całe ciepło powstające podczas zsuwania się lodowca powoduje jego topnienie? Lodowiec początkowo spoczywał, a po pokonaniu wysokości 660 m zatrzymał się. Ciepło topnienia lodu wynosi około 330 kJ/kg.

Rozwiązanie

$$Mgh = mc_t$$

czyli

$$\frac{m}{M} = \frac{gh}{c_t}$$

gdzie h jest wysokością, o jaką zsunął się lodowiec, a c_t ciepłem topnienia lodu.

36 Moment pędu punktu materialnego

Wychodząc z II zasady dynamiki $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, gdzie $\vec{p}$ jest pędem punktu materialnego, a $\vec{F}$ działającą na niego siłą, udowodnij, że obowiązuje równanie

$$\dot{\vec{J}} = \vec{M} \ ,$$

gdzie $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$ (moment pędu), $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (moment siły), a $\vec{r}$ jest wektorem położenia punktu materialnego.

Rozwiązanie

$$\vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

$$\vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \dot{\vec{v}} m = (\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}})m = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v})m = \dot{\vec{J}} \ ,$$

gdzie skorzystaliśmy z $\vec{v} \times \vec{v} = 0$.

37 Zadanie - Moment pędu układu

Układ N punktów materialnych jest izolowany. Oddziaływania między punktami materialnymi spełniają III zasadę dynamiki. Udowodnij, że całkowity moment pęd układu jest zachowany, jeśli dla każdych dwóch punktów materialnych siła, jaką jeden z nich działa na drugi, jest równoległa do prostej przechodzącej przez te punkty materialne.

Rozwiązanie

Równanie ruchy

$$\dot{\vec{J}}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

Całkowity moment pędu $\vec{J}_C \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{J}_i$, więc konstruujemy podobne wyrażenie:

$$\dot{\vec{J}}_C = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{J}}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

Ale:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times (-\vec{F}_{ij}) \ ,$$

gdzie wykorzystałem dowolność indeksowania, przemienność dodawania i III zasadę dynamiki. Wobec tego (tym razem trzeba zastosować trochę inny chwyt):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} &= (\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij})/2 = \\
&= (\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij})/2 = \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}/2
\end{aligned}$$

Zgodnie z założeniami $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$ i otrzymujemy

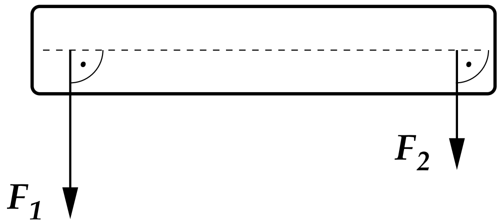
$$\dot{\vec{J}}_C = 0 \ ,$$

co kończy dowód.

38 Zadanie - Momenty sił bez iloczynu wektorowego

Na bryłę sztywną działają dwie równoległe siły $\vec{F}_1$ oraz $\vec{F}_2$ (Rys. 3). Skonstruuj geometrycznie siłę równoważącą $\vec{F}_R$. Wyprowadź związek algebraiczny wiążący wartości sił $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ oraz odległości między prostymi ich działania a prostą działania siły równoważącej.

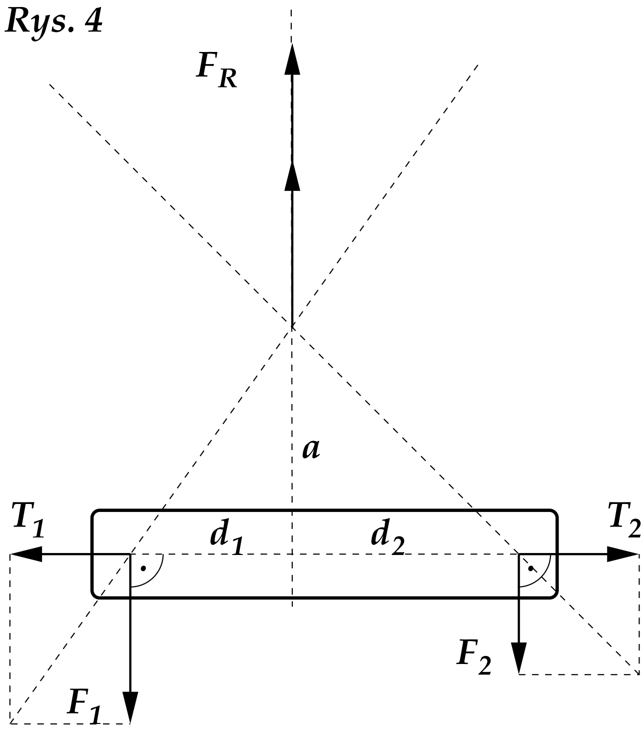
Rys. 3



Rozwiązanie

Bardziej ogólne rozważania: Jan Blinowski, Włodzimierz Zielicz *„Fizyka i astronomia. Część 1”*: rozdział 3 podrozdział 9 paragrafy 5–6 (strony 113–114).

Dodajemy parę sił $\vec{T}_1$ i $\vec{T}_2$, które nie wpływają na zachowanie bryły sztywnej ($T_1 = T_2$):



Z podobieństwa trójkątów:

$$T_1/F_1 = d_1/a$$
$$T_2/F_2 = d_2/a$$

Stąd otrzymujemy szukany związek:

$$F_1 d_1 = F_2 d_2$$

39 Zadanie - Rozstanie

Z dala od innych ciał spoczywa układ dwóch odważników o masach m_1 i m_2 ściskających nieważką sprężynę, której współczynnik sprężystości wynosi k, a długość swobodna równa jest L. Nieruchome odważniki znajdują się w odległości l od siebie. Oblicz prędkości odważników po chwili, gdy sprężyna przestanie na nie oddziaływać. Uzyskaj również wyniki liczbowe w przypadku, gdy $m_1 = 20$ kg, $m_2 = 10$ kg, $k = 500$ N/m, $L = 50$ cm, $l = 30$ cm. Zaniedbaj oddziaływanie grawitacyjne między odważnikami.

Rozwiązanie

Energia początkowa układu:
$E_i = E_s$,
gdzie energia potencjalna sprężyny: $E_s = \frac{1}{2}k(l - L)^2$.
Energia końcowa układu:
$E_f = E_k$,

gdzie energia kinetyczna odważników: $E_k = \frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2)$
Z zasady zachowania energii, $E_f = E_i$, otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2) = \frac{1}{2}k(l-L)^2$$

Dygresja.
Zaniedbaliśmy zmianę energii potencjalnej układu wynikającą z oddziaływania grawitacyjnego.
Poprawne równania wyglądają następująco:
$E_i = \frac{1}{2}k(l-L)^2 - Gm_1m_2/l$
$E_f = \frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2) - Gm_1m_2/r,$
gdzie r jest odległością między odważnikami. Uzyskujemy teraz równanie:

$$\frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2) = \frac{1}{2}k(l-L)^2 - Gm_1m_2(\frac{1}{l} - \frac{1}{r})$$

Czy możemy zaniedbać oddziaływanie grawitacyjne? Stała grawitacji wynosi $G \approx 6.7 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}.
Dla podanych w zadaniu wartości energia potencjalna sprężyny wynosi:
$\frac{1}{2}k(l-L)^2 = 10$ *J*
Natomiast zmiana energii potencjalnej - a w naszym przypadku poprawka do uzyskanego równania - wynosi:
$Gm_1m_2(1/l - 1/r) \approx 1.8 \cdot 10^{-8}$ *J* *dla $r = L$*
$Gm_1m_2(1/l - 1/r) \approx 4.5 \cdot 10^{-8}$ *J* *dla $r \to +\infty$*
A więc w rozważanym problemie poprawka związana z oddziaływaniem grawitacyjnym jest zaniedbywalna.
Koniec dygresji.

Kolejne równanie wynika z zasady zachowania pędu.
Pęd odważnika o masie m_i i prędkości $\vec{v}_i$ wynosi: $\vec{p}_i = \vec{v}_i m_i$.
Pęd początkowy układu, ze względu na zerowe prędkości ciężarków: $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$.
Pęd końcowy układu: $\vec{P'} = \vec{p}_1{}' + \vec{p}_2{}' = \vec{v}_1 m_1 + \vec{v}_2 m_2$.
Zasada zachowania pędu: $\vec{P'} = \vec{P}$
A więc:
$\vec{v}_1 m_1 + \vec{v}_2 m_2 = 0$
Wektory muszą mieć ten sam kierunek, aby równanie mogło być spełnione.
Zakładając postać wektorów: $\vec{v}_1 = v_1\hat{e}_x$ oraz $\vec{v}_2 = -v_2\hat{e}_x$, uzyskujemy równanie:

$$m_1v_1 = m_2v_2$$

Wyznaczamy z tego równania v_2 i podstawiamy do równania wynikającego z zasady zachowania energii, otrzymując wynik:

$$v_1 \quad = \quad |l-L|\sqrt{\frac{k}{m_1(1+m_1/m_2)}}$$

Prędkość drugiego odważnika: $v_2 = v_1m_1/m_2$.
W przypadku, gdy $m_1 = 20$ kg, $m_2 = 10$ kg, $k = 500$ N/m, $L = 50$ cm, $l = 30$ cm:
$v_1 \approx 0.58$ m/s
$v_2 = 2v_1 \approx 1.15$ m/s

40 Zadanie - Zjazd po ruchomej równi

Równia pochyła o kącie nachylenia α oraz o masie M może przesuwać się bez tarcia po stole. Na równię położono ciężarek o masie m. Ciężarek zaczął zsuwać się bez tarcia po równi i przebył drogę L' wzdłuż stoku. Układ znajduje się w polu grawitacyjnym o natężeniu g.
a) Ile wynosi w tym momencie prędkość równi względem stołu? Zadanie rozwiąż, korzystając z zasad zachowania pędu i energii.
b) Jak należałoby zmodyfikować wyjściowe równania, jeśli między równią a ciężarkiem występowałoby tarcie, a praca sił tarcia nad ciężarkiem w układzie związanym z równią wyniosłaby W_T ($W_T < 0$).

Rozwiązanie

Układ nie jest izolowany, ale możemy skorzystać z zasady zachowania pędu dla składowej poziomej, względem której pole grawitacyjne jest prostopadłe (oś X wyznacza poziom). Pęd początkowy wynosi 0, więc:

$$mv_X + MV = 0 \ ,$$

gdzie v_X jest poziomą składową prędkości ciężarka w układzie związanym ze stołem, a V poziomą składową prędkości równi względem stołu. Ponieważ równia nie porusza się w pionie, więc $V\hat{e}_X$ jest szukaną prędkością równi.

Zasada zachowania energii

$$mgL' \sin\alpha = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

zawiera trzecią niewiadomą, v_Y: $v^2 = v_X^2 + v_Y^2$. Z zasady zachowania pędu ($v_X = -MV/m$) i energii możemy otrzymać jedno równanie na dwie niewiadome:

$$2mgL' \sin\alpha = mv_Y^2 + M(1 + M/m)V^2 \tag{1}$$

Związek między składowymi prędkości ciężarka jest prosty w układzie związanym z równią (przyjmuję układ, w którym obie składowe są ujemne - ciężarek porusza się w dół-lewo, równia w prawo):

$$v'_Y / v'_X = \tan\alpha$$

Prędkość ciężarka względem równi, $\vec{v}'$, spełnia:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' \ ,$$

czyli

$$\begin{aligned} v_X &= V + v'_X \\ v_Y &= v'_Y \end{aligned}$$

Dzięki tym związkom otrzymujemy niezależne równanie na v_Y oraz V:

$$v_Y = v'_X \tan\alpha = (v_X - V)\tan\alpha = -V(\frac{M}{m} + 1)\tan\alpha$$

Podstawiając je do równania 1 mamy

$$2mgL' \sin\alpha = [(m + M)\tan^2\alpha + M](1 + \frac{M}{m})V^2$$

A więc ostatecznie prędkość równi względem stołu wynosi:

$$V = +\sqrt{2\sin\alpha g L'} \frac{m}{\sqrt{[(m + M)\tan^2\alpha + M](m + M)}}$$

W przypadku, gdy między równią a ciężarkiem występowałoby tarcie, a praca sił tarcia nad ciężarkiem w układzie związanym z równią wyniosłaby W_T ($W_T < 0$), należy zmodyfikować równanie opisujące zasadę zachowania energii na

$$mgL' \sin\alpha + W_T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

41 Zadanie - Układ podwójny

Dwa kuliste, jednorodne obiekty wirują w przestrzeni kosmicznej po orbitach kołowych wokół wspólnego środka masy. Okres tego ruchu wynosi T. Odległość pomiędzy środkami tych obiektów jest stała i równa R. Wiadomo, że jedno z ciał ma masę nie mniejszą niż M_0. Co można wywnioskować o masie drugiego obiektu? Potrzebną stałą przyrody należy uznać za daną.

42 Zadanie - LEP

W akceleratorze LEP elektrony poruszały się po okręgu o obwodzie 27 km z prędkością bliską prędkości światła $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s. W jednej paczce było około $60 \cdot 10^{10}$ elektronów. W ramach wiązki elektronowej jednocześnie krążyły 4 paczki. Oblicz średni prąd wiązki elektronowej. Ładunek elektronu jest równy $1e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

43 Zadanie - Elektroliza

Przez roztwór soli srebra (^{108}Ag) przepuszczano prąd o natężeniu $I = 2$ A przez czas $T = 7$ h. Metalowe łyżki, zanurzone w roztworze, podłączono jako katodę. Łyżek było $n = 15$, a każda miała powierzchnię $S = 70$ cm^2. Gęstość srebra jest równa $\rho_S = 10490$ kg/m^3, a jego wartościowość 1 (Ag^{+1}). Ładunek elektronu jest równy $1e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; liczba Avogadro $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$/mol.
a) Oblicz grubość warstwy srebra na łyżeczkach.
b) Ile warstw atomowych ma powłoka?

44 Zadanie - Prędkość elektronów

Oszacuj średnią prędkość elektronów w miedzianym bezpieczniku o średnicy D przy maksymalnym dopuszczalnym prądzie $I_{\max}$. Gęstość i masa molowa miedzi wynoszą odpowiednio ρ =9 g/cm^3 oraz μ =63 g/mol; liczba Avogadro $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$/mol; ładunek elektronu $e \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}$C. Przyjmij jednorodny rozkład prądu. Załóż, że każdy atom miedzi oddaje jeden elektron do pasma przewodnictwa. Obliczenia przeprowadź dla trzech przypadków:

$I_{\max}$ [A]	1	10	100
D [mm]	0,042	0,25	1,2

Rozwiązanie

Ile nośników przepłynie w jednostce czasu przez przekrój drutu?

$$nS\bar{v} \ ,$$

gdzie $\bar{v}$ jest średnią prędkością ładunków wzdłuż drutu, n – gęstością ładunków-nośników (o wymiarze [liczba/objętość]), a $S = \pi D^2/4$ powierzchnią przekroju drutu.

Gęstość nośników: $n = N_A\rho/\mu$.

Natężenie prądu: $I = Q/t = en\bar{v}S$.

$\bar{v} = I/(enS) = \alpha I/D^2$, gdzie $\alpha = 4\mu/(e\rho N_A\pi) \approx 0.093$ mm^3/C.

$I_{\max}$ [A]	1	10	100
D [mm]	0.042	0.25	1.2
$\bar{v}$ [mm/s]	53	15	6.5

45 Zadanie - Datowanie geologiczne

W pewnej próbce granitu wykryto 7 mg argonu ^{40}Ar i 1 mg potasu ^{40}K. Zakładając, że argon powstał z rozpadu potasu i wiedząc, że czas połowicznego rozpadu potasu wynosi 1,25 mld lat, wyznacz wiek granitu. Ile jąder potasu rozpadło się w trakcie ostatniego okresu połowicznego rozpadu?
Oszacuj czas, po jakim w dowolnej próbce liczba jąder potasu ^{40}K zmniejszy się przynajmniej 1000 razy.

Uwaga: Zadanie rozwiąż bez używania funkcji $\exp()$ *i logarytmów.*

46 Zadanie - ITER

ITER (*International Thermonuclear Experimental Reactor*) to międzynarodowy projekt badawczy, którego celem jest zbudowanie i uruchomienie urządzenia, w którym będzie można w sposób ciągły i kontrolowany przeprowadzać fuzję jądrową – łączenie jąder deuteru z jądrami trytu. Po syntezie jądra deuteru z jądrem trytu powstaje jądro helu oraz neutron, przy czym wydzielana jest energia 17,6 MeV. Deuter można odfiltrować z morskiej wody, a tryt uzyskuje się bombardując neutronami próbki litu.

a) Zapisz opisaną reakcję syntezy.

b) W jednym litrze morskiej wody znajduje się ok. 33 mg deuteru. Oszacuj, ile wody należy „odfiltrować”, aby w opisanym urządzeniu przez 15 minut uzyskiwać stałą moc 500 MW wydzielaną w opisanej reakcji.

c) Jaką masę trytu należy zużyć, aby całkowicie „spalić” 100 kg deuteru z opisanym procesie.

Rozwiązanie

a)

$$^{2}\text{H} + {}^{3}\text{H} \to {}^{4}\text{He} + n + 17{,}6\ \text{MeV}$$

b)

$$\begin{aligned} E &= Pt = 4,5 \cdot 10^{11}\ \text{J} \\ n &= E/Q = 1,6 \cdot 10^{23} \end{aligned}$$

gdzie E - energia wydzielona w reaktorze, n - liczba reakcji, $Q = 17{,}6$ MeV. Masa spalonego deuteru

$$m_D = n\mu_D/N_A = 0,53\ \text{g}$$

gdzie $\mu_D = 2$ g/mol. Litry wody do odfiltrowania

$$\frac{m_D}{33\ \text{mg/l}} = 16\ \text{l}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{m_D}{m_T} &= \frac{2}{3} \\ m_T &= \frac{3}{2} m_D = 150\ \text{kg} \end{aligned}$$