KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIVERSITAS VARSOVIENSIS

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt Fizyka Plus nr POKL.04.01.02-00-034/11 współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki.

Kurs Plus - Fizyka- wersja dla nauczyciela
Materiały na kurs zaawansowany, uzupełniający

Przygotowanie: Piotr Nieżurawski, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego
e-mail: *Piotr.Niezurawski@fuw.edu.pl*

Powinniśmy porzucić rozróżnienie pomiędzy myślą naukową a nienaukową.
Właściwe rozróżnienie polega na podziale na myśl logiczną i nielogiczną.
Clive Staples Lewis (1898–1963)

1 Oscylator tłumiony *

Oblicz prędkość i przyśpieszenie ciężarka, którego położenie na osi X jest opisane równaniem

$$x(t) = A\, e^{-\lambda t}\, \sin(\omega t + \phi)\ ,$$

gdzie A, λ, ω, ϕ są pewnymi stałymi. Wyraź przyśpieszenie jako funkcję prędkości i położenia.

2 Prędkość i przyśpieszenie w ruchu jednostajnym *

Udowodnij, że wartość prędkości punktu materialnego jest stała wtedy i tylko wtedy, gdy jego przyśpieszenie jest prostopadłe do prędkości albo wartość przyśpieszenia wynosi 0.

Wskazówka: Oblicz szybkość, z jaką zmienia się wartość wyrażenia $\vec{v}\cdot\vec{v}$ czyli v^2.

Rozwiązanie

Rozpatrujemy interwał czasu różny od zera, np. całą minutę lub sekundę ruchu i w dowolnym punkcie w tym interwale (ściśle: bez brzegów) mają zachodzić równości.

$$\begin{aligned}
v = \mathbf{const} \quad &\Leftrightarrow \quad v^2 = \mathbf{const} \\
\frac{dv}{dt} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{d(v^2)}{dt} = 0 \quad \textbf{w całym interwale} \\
v^2 \quad &= \quad \vec{v}\cdot\vec{v} \\
\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{v})}{dt} \quad &= \quad \frac{d(\vec{v})}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{d(\vec{v})}{dt} = 2\vec{v}\cdot\frac{d(\vec{v})}{dt}
\end{aligned}$$

Czyli mamy

$$\frac{d(v^2)}{dt} = 2\vec{v} \cdot \vec{a}$$

Ale lewa strona jest równa 0, więc takoż i prawa.

3 Część i całość *

Student otrzymał zadanie obliczenia siły, jaką jedna półkula jednorodnej kuli działa na drugą półkulę. Po wielu bezsennych nocach doszedł do wniosku, że musi skorzystać z następującego twierdzenia:

Zbiór Z punktów materialnych jest sumą dwóch rozłącznych zbiorów punktów materialnych: A oraz B. Jeśli oddziaływania między punktami materialnymi spełniają III zasadę dynamiki, to siła, jaką działa zbiór punktów B na zbiór punktów A, jest równa sile, jaką działa zbiór punktów Z na zbiór punktów A.

Udowodnij to twierdzenie.

Rozwiązanie

$$\vec{F}_{AB} = \sum_{i\in A}\sum_{j\in B}\vec{F}_{ij}$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_{AZ} &= \sum_{i\in A}\sum_{j\in Z}\vec{F}_{ij} = \sum_{i\in A}\sum_{j\in A\cup B}\vec{F}_{ij} = \sum_{i\in A}(\sum_{j\in A}\vec{F}_{ij} + \sum_{j\in B}\vec{F}_{ij}) = \\ &= \sum_{i\in A}\sum_{j\in A}\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{AB}\end{aligned}$$

Pozostaje dowieść, że

$$\sum_{i\in A}\sum_{j\in A}\vec{F}_{ij} = 0 \ ,$$

do czego wykorzystuję dowolność indeksowania, przemienność dodawania i III zasadę dynamiki:

$$\sum_{i\in A}\sum_{j\in A}\vec{F}_{ij} = \sum_{j\in A}\sum_{i\in A}\vec{F}_{ji} = \sum_{i\in A}\sum_{j\in A}\vec{F}_{ji} = \sum_{i\in A}\sum_{j\in A}(-\vec{F}_{ij})$$

Wobec tego:

$$2\sum_{i\in A}\sum_{j\in A}\vec{F}_{ij} = 0 \ ,$$

co kończy dowód.

4 Ciekawy skutek braku masy

Udowodnij następujące twierdzenie.

Wypadkowa siła działająca na nieważkie ciało jest zawsze równa 0.

Jest ono bardzo przydatne zagadnieniach, w których występują nieważkie liny, pręty, bloczki itd.

Rozwiązanie

Korzystamy z II zasady dynamiki:

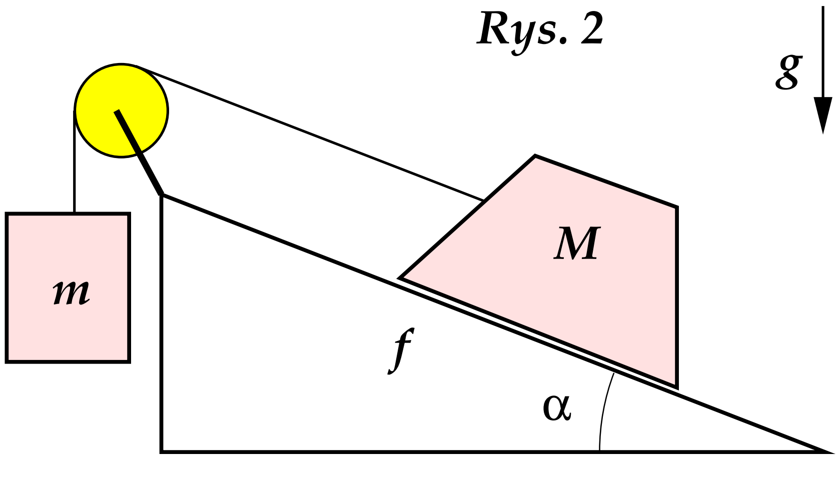
$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Jeśli $m = 0$, to oczywiście $F = 0$. Warto o tym pamiętać, gdyż często spotykam błędne uzasadnienia faktu, że np. siły działające na nieważką linkę z obu stron mają taką samą wartość.

5 Wjazd

Na równi pochyłej o kącie nachylenia α znajduje się odważnik o masie M (Rys. 2), który zawsze dotyka całą powierzchnią swojej podstawy równi. Współczynnik tarcia kinetycznego między odważnikiem a równią wynosi f. Odważnik jest połączony nieważką, nierozciągliwą linką z odważnikiem o masie m, który wisi poza krawędzią równi. Linka przesuwa się bez tarcia po bloczku. Wiadomo, że fragment linki między odważnikiem o masie M i bloczkiem jest zawsze równoległy do stoku równi, a przedłużenie tego fragmentu linki zawsze przechodzi przez środek masy odważnika o masie M. Przyśpieszenie ziemskie wynosi g.
a) Jaki warunek musi spełniać współczynnik tarcia statycznego f_S, aby odważniki spoczywały, jeśli nie nadano im prędkości początkowych?
b) Oblicz wartość przyśpieszenia odważnika o masie m, jeśli wiadomo, że odważniki zaczęły się poruszać i odważnik o masie m opada.
Zaproponuj wartości liczbowe wielkości występujących w zadaniu i uzyskaj wyniki liczbowe.

Rys. 2



Wskazówki

W podpunkcie (a) należy rozpatrzyć dwie możliwości: siła tarcia statycznego może powstrzymywać ciało przed zjeżdżaniem lub wjeżdżaniem po stoku.

6 Zderzenie centralne *

Kula o masie m_1 i prędkości v_1 zderza się z kulą o masie m_2 i prędkości v_2. Zderzenie jest idealnie sprężyste, a środki geometryczne kul cały czas znajdują się na tej samej prostej. Kule nie wirują. Oblicz prędkość kuli o masie m_1 po zderzeniu. Wynik doprowadź do postaci, w której nie występuje pierwiastek kwadratowy. Sprawdź wynik w przypadku, gdy $m_1/m_2 \to 0$, oraz w przypadku, gdy $m_2/m_1 \to 0$.

Spróbuj rozwiązać układ równań sprytnie, bez standardowej procedury dla trójmianu kwadratowego.

7 Wagon i deszcz *

Wagon o masie m_0 zaczął poruszać się bez tarcia po poziomych torach. Jego prędkość początkowa wynosiła v_0. Ze względu na pionowo padający, przymarzający deszcz masa wagonu zwiększa się w tempie w. Znajdź zależność prędkości wagonu od czasu. Po jakim czasie od startu wagonu jego prędkość zmniejszy się stokrotnie, jeśli $m_0 = 10^4$ kg, $w = 0.99$ kg/s?

Rozwiązanie

Oznaczenia:
$\vec{p_w}\,'$ – chwilowy pęd wagonu,
$\vec{p_d}$ – pęd porcji deszczu o masie Δm i prędkości $\vec{v}_d$,
$\vec{p_w}\,''$ – pęd wagonu po zaabsorbowaniu porcji deszczu.
Zgodnie z zasadą zachowania pędu:

$$\vec{p_w}\,' + \vec{p_d} = \vec{p_w}\,''$$

A więc zmiana pędu wagonu:

$$\Delta\vec{p_w} = \vec{p_w}\,'' - \vec{p_w}\,' = \vec{p_d} = \Delta m \vec{v}_d$$

co prowadzi do równania różniczkowego:

$$\dot{\vec{p_w}} = \dot{m}\vec{v}_d$$

Ze względu na siłę reakcji torów pęd wagonu w pionie wynosi zero. Pozostaje równanie na składową poziomą:

$$\frac{d(mv)}{dt} = 0$$

Prawa strona równa jest zeru ze względu na pionowy kierunek prędkości deszczu. Rozwiązanie spełniające warunek początkowy:

$$mv = m_0 v_0$$

Więc:

$$v = \frac{m_0 v_0}{m}$$

Zależność masy wagonu od czasu, zgodnie z treścią zadania, można zapisać jako:

$$\frac{dm}{dt} = w$$

co prowadzi do:

$$m = m_0 + wt$$

zakładając, że $t_0 = 0$.
Odpowiedź: Zależność prędkości wagonu od czasu:

$$v = v_0 m_0/(m_0 + wt)$$

Prędkość wagonu zmniejszy się stokrotnie po czasie:

$$t_1 = 99 m_0/w = 10^6 \text{ s} \approx 1.7 \text{ tygodnia}$$

8 Trochę inne zadanie - ?B

Oszacuj ilość pamięci, jaką powinien dysponować każdy mieszkaniec planety Ziemia, aby można było zapisać tyle bajtów, ile jest atomów w próbce zawierającej jedynie ^{12}C i ważącej 12 g.

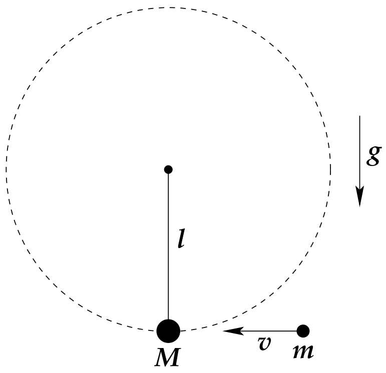
9 Postrzelone wahadło *

Metalowy ciężarek o masie $M = 1960$ g wisi na bardzo lekkim sznurku o długości $l = 50$ cm. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku ciężkości ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu leżącym w płaszczyźnie pionowej.

W pewnej chwili w ciężarek uderza poziomo lecący z prędkością o wartości v pocisk o masie $m = 40$ g. Pocisk zlepia się trwale z ciężarkiem. Powstałą bryłę można traktować jak punkt materialny (w rozważaniach można pominąć rozmiary bryły).

Jaka powinna być minimalna wartość prędkości pocisku, aby utworzona bryła zatoczyła pełny okrąg o promieniu l w płaszczyźnie pionowej?

Przyjmij wartość przyśpieszenia ziemskiego $g = 9{,}8$ m/s^2.



Rozwiązanie

Z.z. pędu

$$
\begin{aligned}
vm &= V_b(M+m) \\
V_b &= vm/(M+m)
\end{aligned}
$$

W najwyższym punkcie przyśpieszenie grawitacyjne gra rolę przyśpieszenia dośrodkowego

$$a_d = g \quad = \quad V'^2/l$$

Z.z. energii

$$\frac{1}{2}V_b^2 = \frac{1}{2}V'^2 + 2lg$$

Stąd mamy v.

10 Zakręcona ćma (wersja deluxe) *

Ćma leci do źródła światła. Wektor prędkości ćmy jest nachylony pod kątem α względem odcinka ćma–źródło. Tor zawarty jest w płaszczyźnie (tzw. ruch płaski). Owad startuje z odległości ρ_0 od źródła. Rozważyć przypadki, gdy:
a) kąt α jest stały, a szybkość ćmy zależy od odległości ćma–źródło jak $v(\rho) = v_0(\rho/\rho_0)^n$, gdzie v_0 i n są stałymi. Znaleźć tor, po jakim porusza się ćma oraz jego długość. Podać równanie ruchu owada. Kiedy czas lotu jest skończony?
b) szybkość lotu owada jest stała, a kąt α zależy od odległości ćma–źródło jak $\alpha(\rho) = \arctan(a\rho^m)$, gdzie a i m są stałymi. Znaleźć tor, po jakim porusza się ćma.

Rozwiązanie

W układzie biegunowym, w którego początku znajduje się źródło światła, wektor położenia ćmy: $\vec{r} = \rho\hat{e}_\rho$

Prędkość ćmy: $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi$

Warunki zadania: $\vec{v} = v(-\cos\alpha\hat{e}_\rho + \sin\alpha\hat{e}_\phi)$, czyli $\dot{\rho} = -v\cos\alpha$ oraz $\rho\dot{\phi} = v\sin\alpha$.

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho\dot{\phi}} = -\frac{1}{\tan\alpha}$$

Eliminujemy czas:

$$\frac{\dot{\rho}}{\dot{\phi}} = \frac{d\rho}{dt}\frac{dt}{d\phi} = \frac{d\rho}{d\phi}$$

Czyli:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{d\phi} = -\frac{1}{\tan\alpha}$$

Ustalamy warunki początkowe: $\rho(t=0) = \rho_0$, $\phi(t=0) = 0$

a) Przypadek $\alpha = \alpha_0$ **oraz** $v(\rho) = v_0(\rho/\rho_0)^n$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\rho'}d\rho' = -\frac{1}{\tan\alpha_0}\int_0^{\phi} d\phi'$$

Równanie toru: $\ln(\rho/\rho_0) = -\phi/\tan\alpha_0$. Lub:

$$\rho(\phi) = \rho_0 \exp(-\phi/\tan\alpha_0)$$

Torem jest *spirala logarytmiczna*.

Równanie ruchu:

$$\frac{d\rho}{dt} = -v\cos\alpha_0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho'}{v(\rho')} = -\cos\alpha_0\int_0^t dt' = -t\cos\alpha_0$$

Po wstawieniu $v(\rho)$ otrzymujemy:

$$\int_{\rho_0}^{\rho}\frac{d\rho'}{\rho'^n} = -v_0 t\cos\alpha_0/\rho_0^n$$

Rozważając oddzielnie przypadki $n = 1$ oraz $n \neq 1$, dostajemy:

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \rho_0 \exp(-v_0 t \cos\alpha_0/\rho_0) \qquad \text{dla } n = 1\\ \rho(t) &= \rho_0[1 + (n-1)v_0 t \cos\alpha_0/\rho_0]^{1/(1-n)} \qquad \text{dla } n \neq 1\end{aligned}$$

Zależność kąta ϕ od czasu otrzymujemy po wstawieniu wyniku dla $\rho(t)$ do równania toru

$$\phi(t) = -\tan\alpha_0 \ln(\rho(t)/\rho_0)$$

Czas ruchu jest skończony, jeśli dla skończonego t_k spełniona jest równość $\rho(t_k) = 0$. Od razu widać, że ruch trwa nieskończenie długo w przypadku $n = 1$. Jeśli $n > 1$, to również czas ruchu jest nieskończony. Jedynie dla $n < 1$ ćma w skończonym czasie doleci do źródła światła.

Przy założeniu stałej szybkości, $v \equiv |\vec{v}| = v_0 = \text{const}$ (czyli $n = 0$), czas ruchu od $\rho = \rho_0$ do $\rho = 0$ wynosi $t_k = \rho_0/|v_\rho| = \rho_0/(v_0 \cos\alpha_0)$.

A więc długość toru wynosi:

$$S = v_0 t_k = \rho_0/\cos\alpha_0$$

Wynik ten jest słuszny dla dowolnego n. Dla $n \geq 1$ zakładamy, że lot ćmy może trwać nieskończenie długo.

b) Przypadek $\alpha(\rho) = \arctan(a\rho^m)$ **oraz** $v = v_0$

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \tan\alpha(\rho') \frac{1}{\rho'} d\rho' = -\int_0^{\phi} d\phi'$$

Po wstawieniu zależności $\alpha(\rho)$:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \rho'^{m-1} d\rho' = -\phi/a$$

Rozważając oddzielnie przypadki $m = 0$ oraz $m \neq 0$, dostajemy:

$$\begin{aligned}\rho(\phi) &= \rho_0 \exp(-\phi/a) \qquad \text{dla } m = 0\\ \rho(\phi) &= \rho_0[1 - m\phi/(a\rho_0^m)]^{1/m} \qquad \text{dla } m \neq 0\end{aligned}$$

Tor w przypadku $m = 0$ jest *spiralą logarytmiczną*. Przypadek ruchu przy $m = 0$ jest równoważny przypadkowi rozpatrzonemu w podpunkcie a) tego zadania dla $n = 0$, jeśli przyjąć, że $a = \tan\alpha_0$.

Jeśli podstawimy $a = \tan\alpha_0/\rho_0^m$, to otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\rho(\phi) &= \rho_0 \exp(-\phi/\tan\alpha_0) \qquad \text{dla } m = 0\\ \rho(\phi) &= \rho_0[1 - m\phi/\tan\alpha_0]^{1/m} \qquad \text{dla } m \neq 0\end{aligned}$$

11 Spacer biedronki po płycie *

Płyta gramofonowa o promieniu R kręci się z prędkością kątową ω względem układu inercjalnego. Ze środka płyty wyrusza biedronka o masie m. Ile powinien wynosić współczynnik tarcia między biedronką a płytą, aby owad mógł osiągnąć krawędź płyty, poruszając się cały czas ruchem jednostajnym prostoliniowym z prędkością v' względem płyty? Rozwiązać korzystając z wzorów na siły pozorne. Czy zwiększenie masy biedronki pozwoliłoby jej na taki sam spacer po szybciej wirującej płycie? Jednorodne pole grawitacyjne jest prostopadłe do powierzchni płyty.

Rozwiązanie

W układzie związanym z płytą: $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_{z'}$, $\vec{v'} = v'\hat{e}_{x'}$, $\vec{r'} = v't\hat{e}_{x'}$.
Siły pozorne: $\vec{F}_{poz} = -m2\vec{\omega} \times \vec{v'} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r'}) = -m2\omega v'\hat{e}_{y'} + m\omega^2 v't\hat{e}_{x'}$
Warunek spaceru ruchem jednostajnym prostoliniowym: siły tarcia statycznego (biedronka musi iść, nie może się ślizgać) powinny równoważyć siły pozorne:
$|\vec{F}_{poz}| = |\vec{F}_T|$
Największa siła pozorna: $\max(|\vec{F}_{poz}|) = \max(m\omega v'\sqrt{4 + (\omega t)^2}) = m\omega v'\sqrt{4 + (\omega R/v')^2}$.
Największa możliwa siła tarcia statycznego: $\max|\vec{F}_T| = \mu mg$ (największa siła pozioma, jaką podłoże może działać na biedronkę; można wspomnieć III zasadę dynamiki).
Ponieważ chodzi o współczynnik tarcia, to zamieniamy równość $|\vec{F}_{poz}| = |\vec{F}_T|$ (zgodną z III zasadą dynamiki) na nierówność $\max|\vec{F}_{poz}| \leq \max|\vec{F}_T|$. Odpowiedź:
$\mu \geq \frac{\omega v'}{g}\sqrt{4 + (\omega R/v')^2}$
Zwiększenie masy nie pozwoli biedronce spacerować po szybciej wirujących płytach.

12 Koralik na pręcie *

Koralik o masie m porusza się bez tarcia wzdłuż wirującego pręta. Pręt jest nachylony do poziomu pod kątem α, a obraca się ze stałą prędkością kątową ω dookoła pionowej osi. Pręt nie porusza się w pionie, układ znajduje się w jednorodnym, stałym polu grawitacyjnym. Znaleźć prędkość i położenie koralika względem pręta, zakładając, że w chwili początkowej koralik spoczywał w odległości D od osi obrotu.

Rozwiązanie

Wybieram układ współrzędnych związanych z prętem, taki że pręt leży wzdłuż osi X', zwrot osi jest od osi obrotu pręta i spełniony jest warunek $x'(t = 0) = D/\cos\alpha$. Zakładam taką orientację pręta i położenia koralika, że w przypadku $\omega = 0$ koralik zacznie przybliżać się do nominalnej osi obrotu pręta. Jedyne siły działające na koralik, które nie są w ogólności całkowicie równoważone przez sił reakcji pręta to siła odśrodkowa i siła grawitacyjna:

$F_{od,\,x'} = \omega^2 x' \cos^2\alpha$

$F_{g,\,x'} = -mg\sin\alpha$

Równanie ruchu: $m\ddot{x}' = m\omega^2 x' \cos^2\alpha - mg\sin\alpha$.

Wprowadzając oznaczenia $\lambda \equiv \omega\cos\alpha$ i $\kappa \equiv g\sin\alpha/\lambda^2$ oraz zmienną $u \equiv x' - \kappa$ uzyskujemy równanie:

$\ddot{u} = \lambda^2 u$,

którego rozwiązaniem jest $u = Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}$. Wracamy do zmiennej x' i otrzymujemy następujące równania z warunków początkowych:

$x'(t = 0) = A + B + \kappa = D/\cos\alpha$

$\dot{x}'(t = 0) = \lambda(A - B) = 0.$

Odpowiedź:

$x' = (D/\cos\alpha - \kappa)(e^{\lambda t} + e^{-\lambda t})/2 + \kappa$

$\dot{x}' = (D/\cos\alpha - \kappa)\lambda(e^{\lambda t} - e^{-\lambda t})/2$

Można wyróżnić następujące przypadki:

1) Koralik spoczywa, jeśli $D/\cos\alpha - \kappa = 0$, czyli $\omega^2 = \omega_0^2$, gdzie $\omega_0 \equiv \sqrt{g\tan\alpha/D}$.
2) Koralik oddala się od osi obrotu, jeśli $\omega^2 > \omega_0^2$.

3) Koralik przybliża się od osi obrotu (a następnie ją przekracza), jeśli $\omega^2 < \omega_0^2$.
4) Jeśli $\omega = 0$, to $m\ddot{x}' = -mg\sin\alpha$ i otrzymujemy: $\dot{x}' = -g\sin\alpha t$ oraz $x' = -g\sin\alpha t^2/2 + D/\cos\alpha$

13 Zjazd po ruchomej równi *

Równia pochyła o kącie nachylenia α oraz o masie M może bez tarcia przesuwać się po stole. Na równię położono ciężarek o masie m. Obliczyć przyśpieszenie równi oraz przyśpieszenie ciężarka w inercjalnym układzie związanym ze stołem, a także przyśpieszenie ciężarka w układzie związanym z równią. Rozpatrzyć dwa przypadki:
a) ciężarek zsuwa się po równi bez tarcia,
b) ciężarek zsuwa się po równi z tarciem, a współczynnik tarcia wynosi μ.
Czy ciężarek może oderwać się od powierzchni równi? Jednorodne pole grawitacyjne jest prostopadłe do powierzchni stołu.

Rozwiązanie

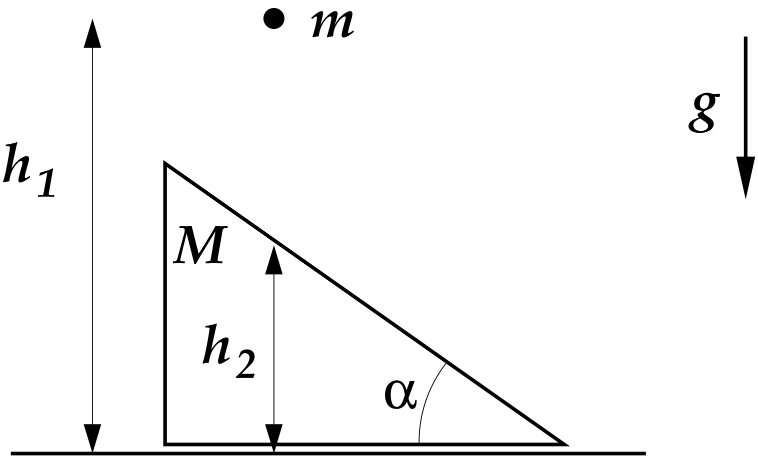
Wybór układów: nieprimowane - związane ze stołem; primowane związane z równią; osie X i X' równoległe względem siebie, powierzchni stołu oraz podstawy równi; osie Y i Y' prostopadłe względem stołu. Siła normalna do powierzchni równi z jaką równia działa na ciężarek: $\vec{F}_N$. Związek między przyśpieszeniami: $\vec{a} = \vec{A} + \vec{a}'$, gdzie $\vec{a}$ - przyśpieszenie ciężarka, a $\vec{A}$ - przyśpieszenie równi. Orientacja równi: wysokość ciała na równi zmniejsza się przy zwiększaniu wartości x' (lub x): $y' = -\tan\alpha\, x' + \text{const}$.
a) Równania ruchu:
$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_N$
$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{F}_N - m\vec{A}$
$M\vec{A} = M\vec{g} - \vec{F}_N + \vec{F}_{RP}$,
gdzie $\vec{F}_{RP}$ jest siłą, z jaką podłoże działa na równię (Reakcja Podłoża). Siły $M\vec{g}$ oraz $\vec{F}_{RP}$ są prostopadłe do podłoża (równoległe do osi Y).
Więzy:
równia porusza się tylko poziomo, zachodzi więc: $M\vec{g} - F_{Ny}\hat{e}_y + \vec{F}_{RP} = 0$;
siła reakcji ciało-równia jest prostopadła do równi: $F_{Nx}/F_{Ny} = \tan\alpha$;
przyśpieszenie ciała w układzie związanym z równią jest równoległe do powierzchni równi:$-a'_y/a'_x = \tan\alpha$ (ciężarek będzie zjeżdżał, więc $a'_y \le 0$).
Stąd równania ruchu rozpisane na współrzędne:
$MA_x = -F_{Nx}$; $MA_y = 0$
$ma'_x = F_{Nx} - mA_x$; $ma'_y = -mg + F_{Ny} - mA_y$
Czyli otrzymujemy z drugiej pary równań:
$ma'_x = F_{Nx}(1 + m/M)$; $-ma'_x\tan\alpha = -mg + F_{Nx}\cot\alpha$
Eliminując F_{Nx} otrzymujemy [przydatna równość: $\sin\alpha\cos\alpha(\cot\alpha + \tan\alpha) = 1$]:
$a'_x = \cos\alpha\, g\sin\alpha(M+m)/(M + m\sin^2\alpha)$
z równania więzów:
$a'_y = -\sin\alpha\, g\sin\alpha(M+m)/(M + m\sin^2\alpha)$
Przyśpieszenie równi względem stołu:
$A_x = -a'_x m/(M+m) = -\cos\alpha\, g\sin\alpha\, m/(M + m\sin^2\alpha)$
$A_y = 0$
Przyśpieszenie ciężarka względem stołu:
$a_x = A_x + a'_x = \cos\alpha\, g\sin\alpha M/(M + m\sin^2\alpha)$
$a_y = A_y + a'_y = -\sin\alpha\, g\sin\alpha(M+m)/(M + m\sin^2\alpha)$.

W rzeczywistości gdyby ciężarek oderwał się od równi, to równia rozpoczęłaby ruch ze stałą prędkością, gdyż nie działałaby na nią żadna wypadkowa siła. Byłoby to sprzeczne z wynikiem $A_x = \text{const}$. Ponieważ w rozwiązaniu używamy równości $-a'_y/a'_x = \tan\alpha$ (wiąz dwustronny), więc odrywaniu się ciężarka odpowiadałoby zniknięcie siły nacisku w pewnej chwili (później siła $\vec{F}_N$ zmieniłaby zwrot; ciężarek hamowałby równię). Zgodnie z równaniem $MA_x = -F_{Nx}$ przyśpieszenie równi osiągnęłoby wtedy wartość 0. Ponieważ otrzymaliśmy stałe przyśpieszenie $|A_x| > 0$, więc przy $0 \le \alpha \le \pi/2$ ciężarek nie oderwie się od równi podczas zsuwania.

b) Równania ruchu:
$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_N + \vec{F}_T$
$m\vec{a}' = m\vec{g} + \vec{F}_N + \vec{F}_T - m\vec{A}$
$M\vec{A} = M\vec{g} - \vec{F}_N - \vec{F}_T$.
Więzy:
Jak w punkcie **a)**
oraz siła tarcia $\vec{F}_T$ jest równoległa do powierzchni równi.
Długość wektora siły tarcia: $F_T = \mu F_N$
Rozkłady na współrzędne:
$F_{Nx} = F_N \sin\alpha$, $F_{Ny} = F_N \cos\alpha$
$F_{Tx} = -F_T \cos\alpha$, $F_{Ty} = F_T \sin\alpha$
Stąd równania ruchu rozpisane na współrzędne:
$MA_x = -F_{Nx} - F_{Tx} = F_N(-\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$; $MA_y = 0$
$ma'_x = F_{Nx} + F_{Tx} - mA_x = F_N(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)(1 + m/M)$;
$ma'_y = -mg + F_{Ny} + F_{Ty} - mA_y = -mg + F_N(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)$
Eliminując F_N oraz a'_yotrzymujemy:
$a'_x = \cos\alpha\, g\cos\alpha(\tan\alpha - \mu)(M + m)/[M + m(\sin^2\alpha - \mu\sin\alpha\cos\alpha)]$
A więc dla $\tan\alpha > \mu$ ciężarek będzie się zsuwać. Z więzów:
$a'_y = -a'_x \tan\alpha$
Przyśpieszenie równi:
$A_x = -a'_x m/(M + m) = -\cos\alpha\, g\cos\alpha(\tan\alpha - \mu)m/[M + m(\sin^2\alpha - \mu\sin\alpha\cos\alpha)]$
Przyśpieszenie ciężarka względem stołu:
$a_x = A_x + a'_x = \cos\alpha\, g\cos\alpha(\tan\alpha - \mu)M/[M + m(\sin^2\alpha - \mu\sin\alpha\cos\alpha)]$
$a_y = a'_y$
Uwaga: Inne podejście do problemu można znaleźć w artykule
`http://xxx.lanl.gov/abs/physics/9808049`.

14 Zderzenie z ruchomą równią *

Z wysokości h_1 nad poziomym lodowiskiem upuszczono kulkę o masie m. Na wysokości h_2 kulka odbiła się idealnie sprężyście od równi pochyłej, która początkowo spoczywała. Znajdź wektor prędkości kulki tuż po odbiciu się od równi. Kąt nachylenia równi wynosi α, a jej masa M. Równia może poruszać się po lodowisku bez tarcia. Układ znajduje się w polu grawitacyjnym o natężeniu g. Promień kulki oraz czas trwania zderzenia są zaniedbywalnie małe. Uzyskaj również wynik liczbowy w przypadku, gdy $m = 2$ kg, $h_1 = 2.6$ m, $h_2 = 0.8$ m, $M = 4$ kg, $\alpha = 45°$ oraz $g = 10$ m/s^2.



Rozwiązanie

Wybieram układ kartezjański, w którym:
$\vec{g} = -g\hat{e}_y$,
kulka początkowo znajduje się w punkcie o współrzędnych $x = 0$ oraz $y = h_1$,
a dolny kraniec równi $x = h_2/\tan\alpha$ oraz $y = 0$.

Pęd kulki tuż przed zderzeniem wynosi

$$\vec{p_1} = -mv_1\hat{e}_y$$

gdzie prędkość v_1 można uzyskać np. z zasady zachowania energii:
$mh_1g = mh_2g + v_1^2m/2$

co prowadzi do wyniku:

$$v_1 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

Tuż przed i po zderzeniu składowa pędu kulki równoległa do powierzchni równi nie zmienia się (brak oddziaływania kulki z równią w kierunku równoległym). Wynosi ona:

$$p_{1r} = p_1 \sin\alpha$$

Pęd kulki zaraz po zderzeniu wynosi: $\vec{p_2} = p_{2x}\hat{e}_x + p_{2y}\hat{e}_y$
Jego składowa równoległa do powierzchni równi wynosi: $p_{2r} = p_{2x}\cos\alpha - p_{2y}\sin\alpha$
Z warunku $p_{1r} = p_{2r}$ otrzymujemy równanie:

$$v_1 \sin\alpha = v_{2x}\cos\alpha - v_{2y}\sin\alpha$$

Składowa X pędu musi spełnić zasadę zachowania pędu:

$$0 = p_{2x} + P$$

gdzie $P = MV$ jest pędem równi tuż po zderzeniu (równia może poruszać się tylko poziomo). A więc:

$$v_{2x} = -VM/m$$

Z zasady zachowania energii, $v_1^2m/2 = v_2^2m/2 + V^2M/2$, otrzymujemy równanie:

$$v_1^2 = v_2^2 + V^2M/m$$

Do rozwiązania mamy układ 4 równań:

$$\begin{aligned} v_2^2 &= v_{2x}^2 + v_{2y}^2 \\ v_1 \sin\alpha &= v_{2x}\cos\alpha - v_{2y}\sin\alpha \\ v_{2x} &= -VM/m \\ v_1^2 &= v_2^2 + V^2 M/m \end{aligned}$$

Korzystając z pierwszego równania eliminujemy z układu v_2, a korzystając z trzeciego eliminujemy v_{2x}. Prowadzi to do układu:

$$\begin{aligned} v_1 \sin\alpha &= -\cos\alpha VM/m - v_{2y}\sin\alpha \\ v_1^2 &= v_{2y}^2 + V^2(1 + M/m)M/m \end{aligned}$$

Wyliczając z pierwszego równania v_{2y} i wstawiając do drugiego równania, otrzymujemy:

$$v_1^2 = (v_1 + \cot\alpha VM/m)^2 + V^2(1 + M/m)M/m$$

Po uproszczeniach:

$$0 = V\left[v_1 m \sin(2\alpha) + V(m\sin^2\alpha + M)\right]$$

Jedno z rozwiązań, $V = 0$, opisuje sytuację, gdy kulka nie oddziałuje z równią (zasady zachowania są wtedy trywialnie spełnione). W interesującym nas przypadku, gdy dochodzi do zderzenia, uzyskujemy wynik:

$$V = -v_1 m \sin(2\alpha)/(m\sin^2\alpha + M)$$

Składowe szukanego wektora prędkości:

$$\begin{aligned} v_{2x} &= -VM/m \\ v_{2y} &= -v_1 + v_{2x}\cot\alpha \end{aligned}$$

W przypadku, gdy $m = 2$ kg, $h_1 = 2.6$ m, $h_2 = 0.8$ m, $M = 4$ kg, $\alpha = 45°$ oraz $g = 10$ m/s^2 otrzymuję:
$v_1 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} = 6$ m/s
$V = -v_1 m\sin(2\alpha)/(m\sin^2\alpha + M) = -12/5$ m/s
$v_{2x} = -VM/m = 24/5$ m/s
$v_{2y} = -v_1 + v_{2x}\cot\alpha = -6/5$ m/s

15 Małpa

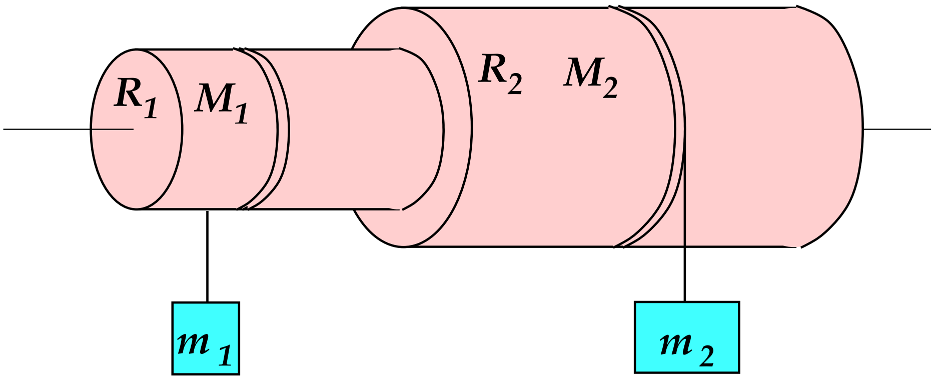
Odważnik o masie M przymocowano do nieważkiej, nierozciągliwej liny, którą przewieszono przez bloczek przyczepiony do sufitu. Za swobodny koniec liny chwyciła małpa o masie m i wspina się. Jakim ruchem względem liny przemieszcza się małpa, skoro jej odległość od sufitu się nie zmienia? Obliczyć parametry tego ruchu. Bloczek jest nieważki, a układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym.

Rozwiązanie

Wybór osi x: $\vec{g} = g\hat{e}_x$. Równania ruchu wzdłuż osi x: $AM = Mg - T$ oraz $am = mg - T$.
Wiąz na długość liny: $X + \pi R + x = L$, gdzie L jest długością liny miedzy odważnikiem a małpą. A więc przyśpieszenie małpy względem liny $a' \equiv \ddot{L} = A + a$.
Warunek zadania: $a = 0$, co oznacza, że: $a' \equiv \ddot{L} = A$
Odpowiedź: Ruch jednostajnie przyśpieszony z $a' = g(1 - m/M)$. Jeśli $m > M$, to rzeczywiście małpa się wspina.

16 Bloczek-dźwignia

Bloczek składający się z dwóch sztywno połączonych jednorodnych walców może obracać się dookoła własnej osi symetrii. Na walec o promieniu R_1 i masie M_1 nawinięto nierozciągliwy sznurek, do którego przymocowano ciężarek o masie m_1. W przeciwnym kierunku nawinięto na walec o promieniu R_2 i masie M_2 nierozciągliwy sznurek, do którego przymocowano ciężarek o masie m_2. Układ znajduje się w stałym jednorodnym polu grawitacyjnym. Obliczyć przyśpieszenie ciężarka o masie m_1.



Rozwiązanie

Równania dla ciężarków:

$m_1 a_1 = m_1 g - T_1$

$m_2 a_2 = m_2 g - T_2$

Równanie dla układu walców:

$I\varepsilon = T_1 R_1 - T_2 R_2,$

gdzie $I = M_1 R_1^2/2 + M_2 R_2^2/2$

Równania więzów:

$a_1 = R_1 \varepsilon$

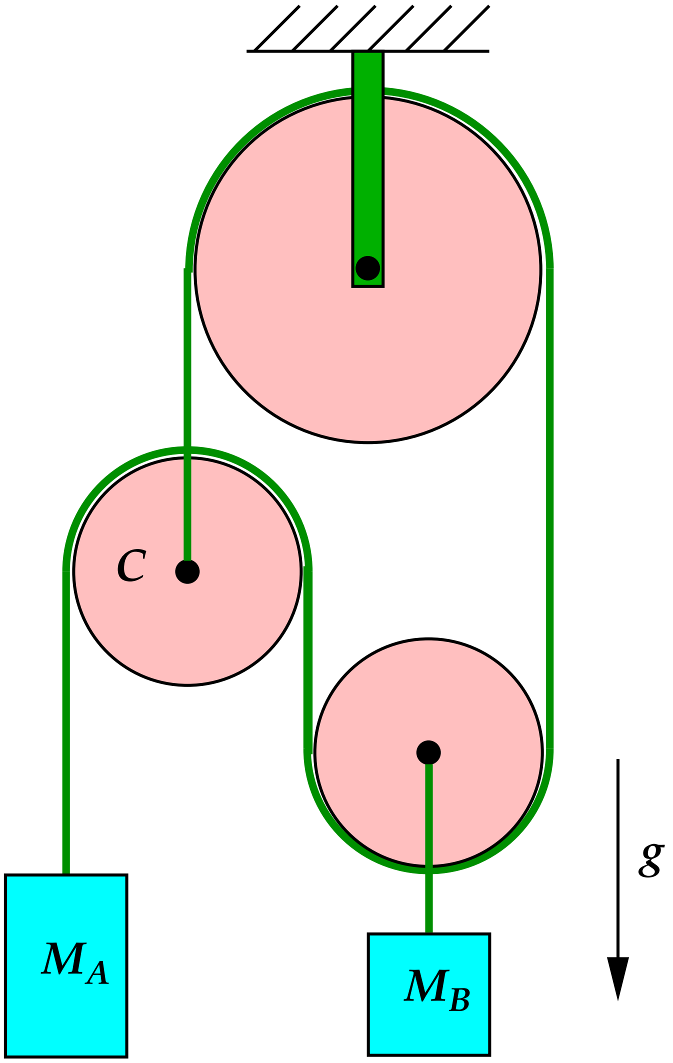
$a_2 = -R_2 \varepsilon$

Odpowiedź:

$a_1 = gR_1(m_1 R_1 - m_2 R_2)/(I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)$

17 Straszliwy wielokrążek *

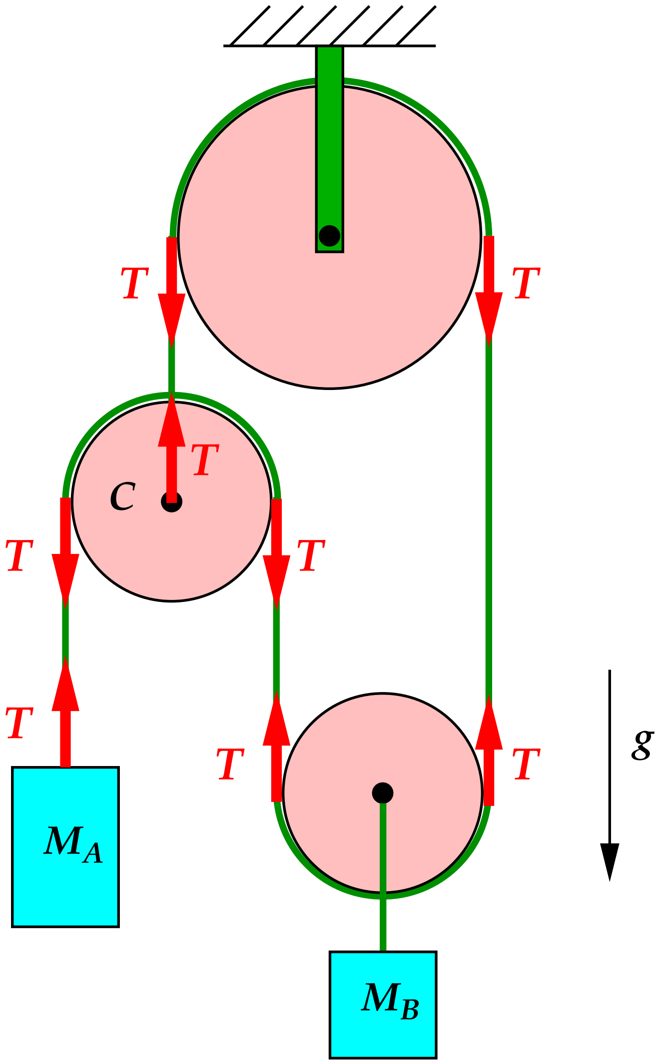
Z jakimi przyśpieszeniami będą poruszać się odważniki o masach M_A oraz M_B w układzie przedstawionym na rysunku? Wszystkie bloczki są nieważkie, a nieważka, nierozciągliwa lina porusza się bez tarcia. Układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym.



Zadanie to wymyśliłem na kolokwium z Fizyki IBC na jesieni 2006 r. Spośród 155 piszących kolokwium 7 osób przedstawiło poprawne rozwiązanie. Zadanie zostało następnie wykorzystane w Olimpiadzie Fizycznej.

Rozwiązanie - Sposób 1

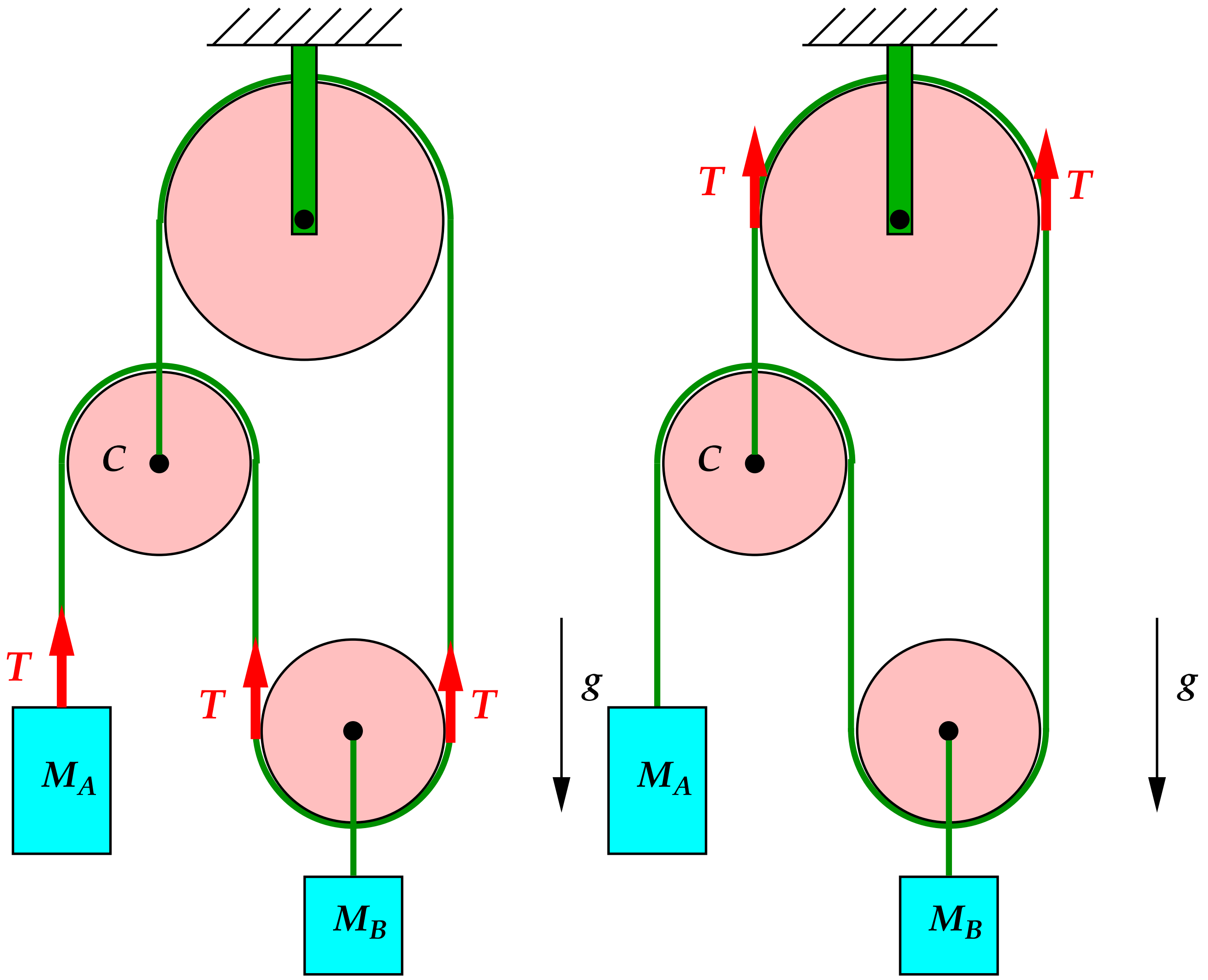
Lina jest nieważka (czyli jej masa wynosi 0) oraz może ślizgać się bez tarcia po bloczkach, więc zgodnie z II zasadą dynamiki suma sił działających wzdłuż liny na dowolny jej fragment wynosi 0. Wobec tego np. siły, jakimi lina działa na ciężarek o masie M_A oraz oś nieważkiego bloczka C, mają tę samą wartość (tutaj: *wartość* oznacza długość wektora), T. Na rysunku zaznaczono wektory sił, jakimi lina działa na bloczki oraz na ciężarek o masie M_A:



Z rysunku wynika, że na bloczek C działa wypadkowa siła o wartości T. Ze względu na to, że bloczek jest nieważki, korzystając z II zasady dynamiki, dochodzimy do wniosku (podobnie jak dla liny), że $T = 0$. Na ciężarki działa tylko siła grawitacji, więc każdy z nich porusza się w dół z przyśpieszeniem g.

Rozwiązanie - Sposób 2

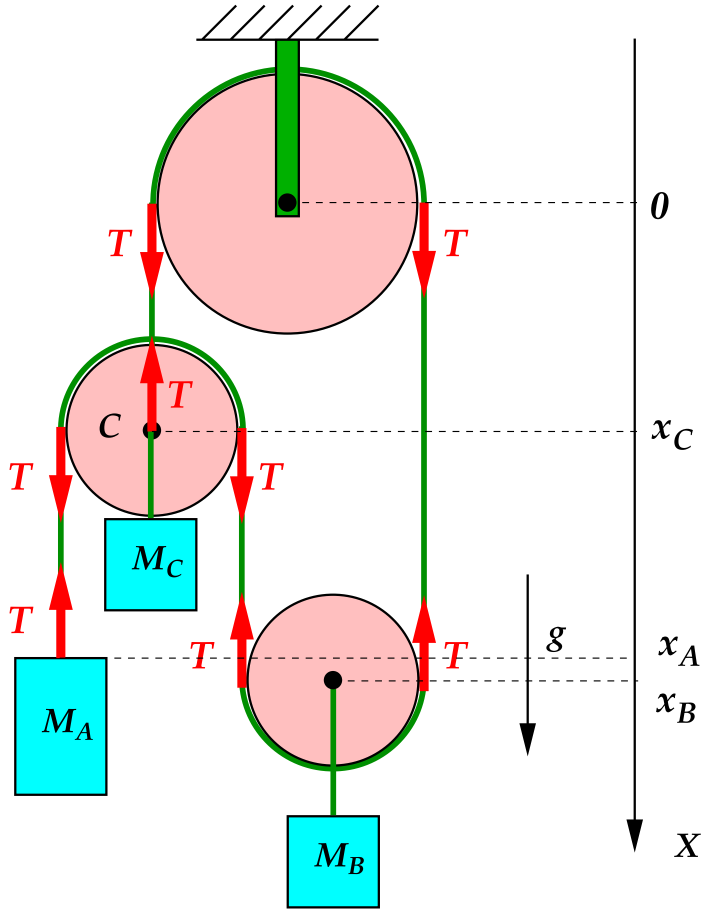
Korzystając z wniosku o równości siły naciągu liny na całej jej długości z paragrafu „Rozwiązanie - Sposób 1”, rozważam całkowitą siłę działającą na oba odważniki. Można to zrobić na dwa sposoby:



Przy czym niezaznaczone siły grawitacyjne są oczywiście takie same w obu przypadkach. Ponieważ całkowita siła działająca na bloczki musi być taka sama w danym układzie odniesienia niezależnie od konfiguracji nieważkich obiektów, które pośredniczą w jej przekazywaniu, więc otrzymujemy warunek $3T = 2T$, który jest spełniony jedynie dla $T = 0$. Na ciężarki działa tylko siła grawitacji, więc każdy z nich porusza się w dół z przyśpieszeniem g.

Rozwiązanie - Sposób 3

Korzystam z wniosku o równości siły naciągu liny na całej jej długości z paragrafu „Rozwiązanie - Sposób 1". Zakładam, że do osi bloczka C doczepiono odważnik o masie M_C. Wybierając oś X jako zgodną z wektorem przyśpieszenia ziemskiego ($\vec{g} = g\hat{e}_x$) oraz jej początek (na przykład) tak jak na rysunku,



uzyskuję następujące równania ruchu dla odważników wzdłuż tej osi:

$$
\begin{aligned}
a_A M_A &= g M_A - T \\
a_B M_B &= g M_B - 2T \\
a_C M_C &= g M_C + 2T - T
\end{aligned}
$$

Wiąz na długość liny, która jest nierozciągliwa, $x_A - x_C + 2x_B =$ const., prowadzi do związku między przyśpieszeniami:

$$a_A - a_C + 2a_B = 0$$

Rozwiązując powyższy układ 4 równań, otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
T &= 2M_A M_B M_C/(4M_A M_C + M_B M_C + M_A M_B) \\
a_A &= g(4M_A M_C - M_B M_C + M_A M_B)/(4M_A M_C + M_B M_C + M_A M_B) \\
a_B &= g(M_B M_C + M_A M_B)/(4M_A M_C + M_B M_C + M_A M_B)
\end{aligned}
$$

Uwzględniając warunki zadania, czyli $M_C = 0$, uzyskujemy odpowiedź:

$$
\begin{aligned}
T &= 0 \\
a_A &= g \\
a_B &= g
\end{aligned}
$$

Komentarz

Poniżej omówione są zagadnienia, których niezrozumienie było najczęstszą przyczyną błędnego rozwiązania zadania.

Druga zasada dynamiki definiuje wypadkową siłę działającą na obiekt za pomocą zmiany jego pędu:

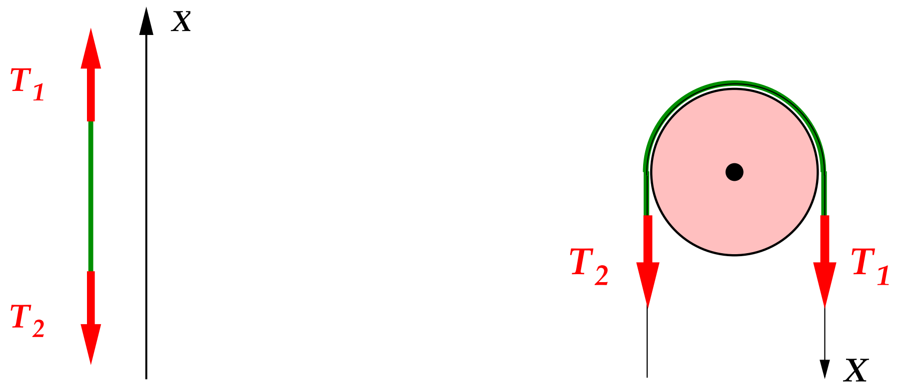
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

A więc w przypadku obiektów, których pęd nie zmienia się w czasie, otrzymujemy:

$$\vec{F} = 0$$

Takimi są w mechanice klasycznej na przykład obiekty bezmasowe, gdyż mają stały, zerowy pęd ($m = 0 \Rightarrow \vec{p} = m\vec{v} = 0$). Stąd bierze się np. równość siły naciągu na całej długości nieważkiej liny. W rozwiązaniach kolokwialnych pojawiało się wielokrotnie błędne stwierdzenie, że jest to wynikiem również nierozciągliwości liny. Nie jest to prawdą. Siła naciągu będzie taka sama na całej długości dla nieważkiej gumy, sprężyny itp. Równość ta jest spełniona również w nieinercjalnych układach, gdyż siły pozorne działające na obiekt są proporcjonalne do jego masy.

Istotne jest, czy na ciało nie działają styczne do kierunku jego ruchu siły, które nie znikają przy $m = 0$. Np. w przedstawionych dwóch przypadkach ruchu liny o masie m (bloczek jest nieważki i obraca się bez oporów lub lina przesuwa się po nim bez tarcia):



otrzymujemy takie samo równanie ruchu wzdłuż osi X,

$$ma = T_1 - T_2$$

a dla liny nieważkiej ($m = 0$) w obu przypadkach równość:

$$T_1 = T_2$$

W drugim przypadku na linę działa bloczek, ale w każdym jej punkcie tylko prostopadle do wybranej osi, wzdłuż której rozpatrujemy ruch.

Jak widać, powyższe rozważania są prawdziwe, a wyniki wiarygodne, jeśli problem jest dobrze określony, tzn. nie pojawiają się np. nieskończone przyśpieszenia.

18 Moment pędu układu *

Układ N punktów materialnych jest izolowany. Oddziaływania między punktami materialnymi spełniają III zasadę dynamiki. Udowodnij, że całkowity moment pęd układu jest zachowany, jeśli dla każdych dwóch punktów materialnych siła, jaką jeden z nich działa na drugi, jest równoległa do prostej przechodzącej przez te punkty materialne.

Rozwiązanie

Równanie ruchy

$$\dot{\vec{J}}_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

Całkowity moment pędu $\vec{J}_C \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{J}_i$, więc konstruujemy podobne wyrażenie:

$$\dot{\vec{J}}_C = \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{J}}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

Ale:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times (-\vec{F}_{ij}) \ ,$$

gdzie wykorzystałem dowolność indeksowania, przemienność dodawania i III zasadę dynamiki. Wobec tego (tym razem trzeba zastosować trochę inny chwyt):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} &= (\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij})/2 = \\
&= (\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij})/2 = \\
&= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}/2
\end{aligned}$$

Zgodnie z założeniami $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$ i otrzymujemy

$$\dot{\vec{J}}_C = 0 \ ,$$

co kończy dowód.

19 Kometa Halleya *

Oblicz największą i najmniejszą wartość prędkości komety, jeśli najmniejsza i największa odległość od komety do Słońca równa jest odpowiednio d oraz D. Dane są masa Słońca M_S oraz stała grawitacji G. Uzyskaj również wyniki liczbowe, jeśli przyjmiemy $d = 9 \cdot 10^{10}$ m, $D = 5 \cdot 10^{12}$ m, $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg oraz $G = 7 \cdot 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}.

Rozwiązanie

Z zasady zachowania momentu pędu:

$$vd = VD$$

Z zasady zachowania energii:

$$v^2 - \frac{\alpha}{d} = V^2 - \frac{\alpha}{D} \ ,$$

gdzie $\alpha = 2GM_S$.

Po wstawieniu $V = \frac{d}{D}v$ z pierwszego równania do równania drugiego:

$$v^2(1-(\frac{d}{D})^2) = \alpha(d^{-1} - D^{-1})$$

Ostatecznie:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\alpha(d^{-1} - D^{-1})/(1-(\frac{d}{D})^2)} \\ V &= \sqrt{\alpha(D^{-1} - d^{-1})/(1-(\frac{D}{d})^2)} \end{aligned}$$

Wartości liczbowe:

$$\begin{aligned} v &\approx 55000 \text{ m/s} \\ V &\approx 1000 \text{ m/s} \end{aligned}$$

20 Trójkąt grawitacyjny *

Jakie warunki muszą być spełnione, aby odległości między trzema swobodnymi punktami materialnymi były stałe, jeśli znane są ich masy oraz wiadomo, że punkty nie leżą na prostej? Oblicz prędkość kątową punktów materialnych w inercjalnym układzie, w którym środek ich masy spoczywa. Wyprowadź warunki na odległości pomiędzy ciałami. Punkty materialne oddziałują jednie grawitacyjnie. Układ jest izolowany.

Rozwiązanie

Wybieram inercjalny układ odniesienia, w którym środek masy układu spoczywa (istnienie takiego układu wynika z zasady zachowania pędu dla układu izolowanego). Dla wygody początek układu odniesienia umieszczony jest w środku masy, czyli

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 = 0$$

Z warunków geometrycznych wynika, że ciała poruszają się ze wspólną prędkością kątową ω po okręgach o środkach w środku masy. Np. z zasady zachowania momentu pędu wynika, że prędkość kątowa jest stała.

Z warunku na siłę dośrodkową dla ciała o indeksie 1

$$-Gm_1(m_2\vec{r}_{12}/r_{12}^3 + m_3\vec{r}_{13}/r_{13}^3) = -m_1\omega^2\vec{r}_1 \ ,$$

po skorzystaniu z równania na środek masy, otrzymuję

$$m_2\vec{r}_2(-r_{12}^{-3} + r_{13}^{-3}) = (\omega^2/G - m_2r_{12}^{-3} - r_{13}^{-3}(m_1+m_3))\vec{r}_1 \ ,$$

a ponieważ wektory wodzące nie są równoległe, więc współczynniki przy nich muszą być równe zeru. Stąd wniosek, że $r_{12} = r_{13} \equiv a$. Dzięki symetrii zagadnienia względem zamiany indeksów spełniony jest również związek $r_{21} = r_{23} \equiv a$. A więc trójkąt musi być równoboczny i wirować z prędkością kątową

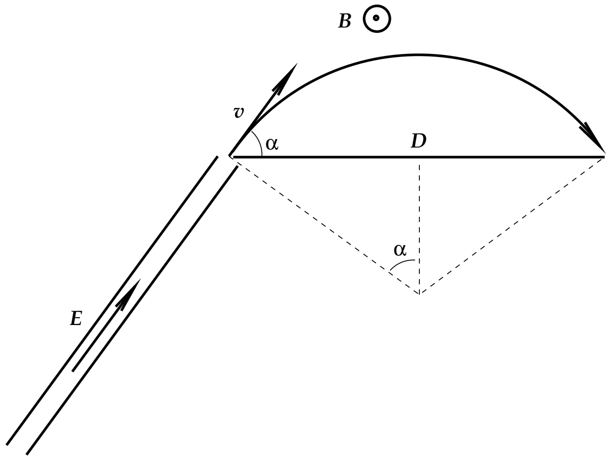
$$\omega = \sqrt{G(m_1+m_2+m_3)/a^3}$$

21 Akcelerator, magnes i ekran

Początkowo spoczywającą cząstkę o dodatnim ładunku Q i masie m przyśpieszono za pomocą akceleratora o długości L. W akceleratorze wytwarzane jest jednorodne pole elektryczne E. Tuż za akceleratorem cząstka wleciała w obszar jednorodnego pola magnetycznego B. W jakiej odległości D od końca akceleratora cząstka uderzy w ekran? Kąt między osią akceleratora a płaszczyzną ekranu wynosi α. W wybranym układzie współrzędnych wektory pól są wyrażone następująco: $\vec{E} = E(\cos\alpha\hat{e}_x + \sin\alpha\hat{e}_y)$ i $\vec{B} = B\hat{e}_z$, równanie ekranu ma postać $y = 0$, a cząstka opuszczając akcelerator przelatuje przez początek układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Układ eksperymentalny (rozwiązujący powinien sporządzić go na podstawie opisu):



W akceleratorze cząstka porusza się z przyśpieszeniem: $a = QE/m$. Na długości L uzyska prędkość $v = \sqrt{2QEL/m}$. W polu B będzie poruszać się po łuku o promieniu R wynikającym z równości: siła Lorentza = siła dośrodkowa, $mv^2/R = QvB$. A więc $R = mv/(QB)$.
Cząstka od wylotu z akceleratora do uderzenia w ekran będzie się poruszać po łuku o mierze kątowej 2α. Stąd $D = 2R\sin\alpha = 2\sin\alpha\sqrt{2ELm/Q}/B$

22 Pola równoległe *

Cząstka o ładunku Q i masie m, mając początkową prędkość $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{e}_x + v_{0y}\hat{e}_y$, wlatuje w obszar równoległych, jednorodnych pól: elektrycznego $\vec{E} = E\hat{e}_y$ i magnetycznego $\vec{B} = B\hat{e}_y$. Wynikające z drugiej zasady dynamiki Newtona równania na współrzędne położenia cząstki x i z rozwiązać po sprowadzeniu do jednego równania na zmienną zespoloną $f = \dot{x} + i\dot{z}$. Podać równanie ruchu cząstki zakładając, że w chwili początkowej przelatywała przez początek układu współrzędnych. Jaki warunek musi być spełniony, aby cząstka dotarła do ekranu, którego równanie ma postać $x = L$? Jaki obraz utworzą na ekranie cząstki o różnych wartościach v_{0x}, jeśli założyć, że odległość L jest mała w porównaniu z promieniem toru w płaszczyźnie XZ, tzn. $L \ll |v_{0x}m/(QB)|$?
Wskazówka: Obraz można znaleźć jako zależność $y(z)$ po zastosowaniu następujących przybliżeń dla $x(t)$ i $z(t)$: jeśli $\sin\alpha \ll 1$, to $\sin\alpha \approx \alpha$ oraz $\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$.

Rozwiązanie

Równanie ruchu, $m\ddot{\vec{r}} = Q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})$, rozpisane na współrzędne:
$\ddot{x} = -\lambda\dot{z}$
$\ddot{y} = \kappa$
$\ddot{z} = \lambda\dot{x}$,
gdzie $\lambda = QB/m$ oraz $\kappa = QE/m$. Zakładam, że $t_0 = 0$. Rozwiązanie drugiego równania:
$y(t) = \kappa t^2/2 + v_{0y}t$.
Pierwsze i trzecie równanie sprowadza się do:
$\dot{f} = i\lambda f$,
którego rozwiązaniem uwzględniającym warunki początkowe jest:
$f = v_{0x}\exp(i\lambda t)$,
co odpowiada: $\dot{x} = v_{0x}\cos(\lambda t)$ oraz $\dot{z} = v_{0x}\sin(\lambda t)$. Całkując otrzymujemy:
$x(t) = (v_{0x}/\lambda)\sin(\lambda t)$
$z(t) = (v_{0x}/\lambda)(1 - \cos(\lambda t))$.
Warunek dotarcia do ekranu: $x(t) \geq L$, czyli $v_{0x}/\lambda \geq L$.
Cząstka dotrze do ekranu po czasie t_1: $L\lambda/v_{0x} = \sin(\lambda t_1) \approx \lambda t_1$ (zgodnie z warunkiem $L \ll |v_{0x}m/(QB)|$).
$t_1 = L/v_{0x}$
$z(t_1) \approx v_{0x}\lambda t_1^2/2 = \lambda L^2/(2v_{0x})$
$y(t_1) = \kappa t_1^2/2 + v_{0y}t_1 = \kappa L^2/(2v_{0x}^2) + v_{0y}L/v_{0x}$.
Eliminując v_{0x} otrzymujemy:
$y(z) = 2z[z\kappa/(\lambda L) + v_{0y}]/(\lambda L)$,
czyli równanie paraboli. Położenie jej ekstremum jest zależne od v_{0y}.

23 Pola prostopadłe *

Cząstka o ładunku Q i masie m znajduje się w obszarze prostopadłych, jednorodnych pól: elektrycznego $\vec{E} = E\hat{e}_z$ i magnetycznego $\vec{B} = B\hat{e}_y$. Wynikające z drugiej zasady dynamiki Newtona równania na współrzędne położenia cząstki x i z rozwiązać po sprowadzeniu do jednego równania na zmienną zespoloną $f = \dot{x} + i\dot{z}$. Podać równanie ruchu cząstki zakładając, że w chwili początkowej wyruszała ona z początku układu współrzędnych z prędkością początkową $\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{e}_x + v_{0y}\hat{e}_y$. Jakie warunki muszą być spełnione, aby torem cząstki była zwykła cykloida? Jakie warunki muszą być spełnione, aby cząstka poruszała się ruchem jednostajnym prostoliniowym? Jaka będzie wtedy jej prędkość?

Rozwiązanie

Równanie ruchu, $m\ddot{\vec{r}} = Q(\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B})$, rozpisane na współrzędne:
$\ddot{x} = -\lambda\dot{z}$
$\ddot{y} = 0$
$\ddot{z} = \lambda\dot{x} + \kappa$,
gdzie $\lambda = QB/m$ oraz $\kappa = QE/m$. Zakładam, że $t_0 = 0$. Rozwiązanie drugiego równania:
$y(t) = v_{0y}t$.
Pierwsze i trzecie równanie sprowadza się do:
$\dot{f} = i\lambda f + i\kappa$,
którego rozwiązaniem uwzględniającym warunki początkowe jest:
$f = (v_{0x} + \kappa/\lambda)\exp(i\lambda t) - \kappa/\lambda$,
co odpowiada: $\dot{x} = (v_{0x} + \kappa/\lambda)\cos(\lambda t) - \kappa/\lambda$ oraz $\dot{z} = (v_{0x} + \kappa/\lambda)\sin(\lambda t)$. Całkując otrzymujemy:
$x(t) = [(v_{0x} + \kappa/\lambda)/\lambda]\sin(\lambda t) - \kappa/\lambda t$,
$z(t) = [(v_{0x} + \kappa/\lambda)/\lambda](1 - \cos(\lambda t))$.

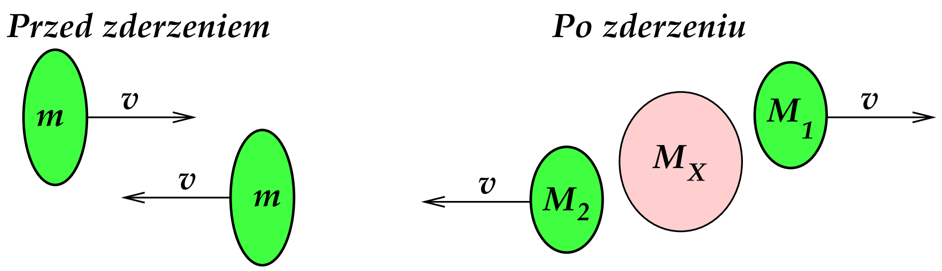
Przykład zwykłej cykloidy: $x = R[\sin(\omega t) - \omega t]$, $z = R[1 - \cos(\omega t)]$. A więc żądamy: $\kappa/\lambda/[(v_{0x} + \kappa/\lambda)/\lambda] = \lambda$, po uproszczeniu: $v_{0x} = 0$.
Tor jest zwykłą cykloidą, gdy $v_{0x} = 0$ oraz $v_{0y} = 0$.
Cząstka będzie poruszała się ruchem jednostajnym prostoliniowym, gdy $v_{0x} = -\kappa/\lambda$ (pomijam przypadki zerowych pól, ładunku itp.). Jej prędkość w takim wypadku to $\vec{v} = -(\kappa/\lambda)\hat{e}_x + v_{0y}\hat{e}_y$.

Fizyka relatywistyczna

W poniższych problemach należy uwzględniać efekty relatywistyczne.

24 Zderzenie dwóch jąder

Dwa jądra atomowe zbliżają się do siebie. Każde ma masę m i porusza się z prędkością v (kierunki prędkości są równoległe). Po zderzeniu obserwujemy dwa jądra o masach $M_1 = \frac{3}{4}m$ i $M_2 = \frac{1}{4}m$, które kontynuują ruch pierwotnych jąder (tzn. mają tę samą prędkość i kierunek co pierwotne jądra), oraz układ cząstek powstałych w zderzeniu, X. Obliczyć masę niezmienniczą układu X, M_X. Podać również wyrażenie na M_X w szczególnych przypadkach: a) $M_1 = M_2$ oraz b) $M_1 = M_2 = \frac{1}{2}m$.
Uwaga: Zastanowić się, jaki jest kierunek wektora pędu układu X. Pominąć efekty związane z budową jądra.



Rozwiązanie

Ze względu na zasadę zachowania pędu pęd układu X jest równoległy do wektora prędkości $\vec{v}$ – jest to problem jednowymiarowy. Jednostki: $c = 1$. Oznaczenia: $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$.

Sposób I „bezpośredni": Dodaję energie i pędy zderzających się fragmentów jąder

Energia: $E_X = \gamma(m - M_1) + \gamma(m - M_2)$.

Pęd: $P_X = v\gamma(m - M_1) - v\gamma(m - M_2)$.

Sposób II „pośredni": Odejmuję energie i pędy pozostałych fragmentów jąder od całkowitej energii i pędu

Energia przed zderzeniem: $E_{przed} = e + e$, gdzie $e = \gamma m$.

Energia po zderzeniu: $E_{po} = E_1 + E_2 + E_X$, gdzie $E_1 = \gamma M_1$ oraz $E_2 = \gamma M_2$.

Pęd przed zderzeniem: $p_{przed} = p_1 + p_2$, gdzie $p_1 = v\gamma m$ oraz $p_2 = -v\gamma m$.

Pęd po zderzeniu: $p_{po} = P_1 + P_2 + P_X$, gdzie $P_1 = v\gamma M_1$ oraz $P_2 = -v\gamma M_2$.

Z zasady zachowania energii, $E_{przed} = E_{po}$, otrzymuję $E_X = 2e - E_1 - E_2 = \gamma(2m - M_1 - M_2)$.

Z zasady zachowania pędu, $p_{przed} = p_{po}$, otrzymuję $P_X = p_1 + p_2 - P_1 - P_2 = v\gamma(-M_1 + M_2)$.

Odpowiedź

Masa niezmiennicza układu X wynosi

$$M_X = (E_X^2 - P_X^2)^{1/2} = \gamma[(2m - M_1 - M_2)^2 - v^2(M_1 - M_2)^2]^{1/2}.$$

Jeśli $M_1 = \frac{3}{4}m$ i $M_2 = \frac{1}{4}m$, to otrzymuję $M_X = \gamma m[1 - v^2/4]^{1/2}$.

a) Dla $M_1 = M_2$ otrzymuję $M_X = \gamma 2(m - M_1)$.

b) Dla $M_1 = M_2 = \frac{1}{2}m$ otrzymuję $M_X = \gamma m$.

25 Awaria rakiety i wyprawa ratunkowa

Z Ziemi wyrusza rakieta lecąca z prędkością $c/2$. Po 10 dniach rakieta ulega awarii (10 dni wg pokładowego zegara). Załoga wysyła sygnał świetlny z prośbą o pomoc. Po otrzymaniu wiadomości centrum lotów na Ziemi natychmiast wysyła rakietę ratunkową. Z jaką szybkością v powinna się ona poruszać względem Ziemi, aby uratować załogę pierwszej z rakiet, w której astronauci mogą utrzymać się przy życiu przez 30 dni od awarii?

Rozwiązanie

Konwencja: *Wielkość*$_{\textit{Obiekt/Wydarzenie}\ \mathrm{w}\ \textit{Układ}}$

Z - Ziemia

R - pierwsza rakieta

A - awaria R

I - dotarcie informacji

C - czekanie na pomoc

P - druga rakieta („Pomoc")

S - spotkanie R i P

Dane: $v_{RwZ} = c/2$; $t_{AwR} = 10$ dni; $\Delta t_{CwR} = 30$ dni

Szukamy v_{PwZ}.

$$v_{PwZ} = \frac{x_{SwZ}}{\Delta t_{PwZ}}$$

Przejście z układu *R* do *Z*: $x_{SwZ} = \gamma_{RwZ}(x_{SwR} + v_{RwZ}t_{SwR})$. Ale $x_{SwR} = x_{RwR} = 0$, więc: $x_{SwZ} = \gamma_{RwZ}v_{RwZ}t_{SwR}$.

Wiemy, że $t_{SwR} = t_{AwR} + \Delta t_{CwR}$. Obliczyliśmy więc x_{SwZ}.

Obliczmy Δt_{PwZ}, czyli czas lotu *P*.

$x_{AwZ} = \gamma_{RwZ}(x_{AwR} + v_{RwZ}t_{AwR})$

Ale $x_{AwR} = x_{RwR} = 0$. Tak więc $x_{AwZ} = \gamma_{RwZ}v_{RwZ}t_{AwR}$.

Można już obliczyć czas Δt_{IwZ} potrzebny na dotarcie wezwania z miejsca *A* do *Z* w układzie *Z*: $\Delta t_{IwZ} = x_{AwZ}/c$.

Okres oczekiwania w układzie Z: $\Delta t_{CwZ} = \gamma_{RwZ}(\Delta t_{CwR} + v_{RwZ}\Delta x_{CwR}/c^2)$. Ale $\Delta x_{CwR} = \Delta x_{RwR} = 0$.

Ostatecznie:

$$\Delta t_{PwZ} = \Delta t_{CwZ} - \Delta t_{IwZ} = \gamma_{RwZ}(\Delta t_{CwR} - v_{RwZ} t_{AwR}/c)$$

$$v_{PwZ} = \frac{x_{SwZ}}{\Delta t_{PwZ}} = \frac{v_{RwZ}(t_{AwR} + \Delta t_{CwR})}{\Delta t_{CwR} - v_{RwZ} t_{AwR}/c}$$

Podstawiając wartości otrzymujemy odpowiedź:

$$v_{PwZ} = c/2 \frac{10+30}{30-10/2} = \frac{4}{5}c$$

26 Fotografia pręta *

Równoległy do osi Y pręt porusza się wzdłuż osi X z prędkością v. Fotografujemy pręt aparatem znajdującym się w punkcie $x = y = 0$, $z = a$. Na zdjęciu środek pręta znajduje się w początku układu współrzędnych. Jaki jest kształt pręta na fotografii?

Rozwiązanie

Zakładamy, że na zdjęciu widzimy obraz utworzony przez promienie świetlne, które dotarły do kliszy w chwili t_K.

Dla każdego punktu pręta $\vec{r}_P(t)$, który w chwili t wysłał promień światła musi być spełniony warunek:

$$t_K = |\vec{r}_P(t) - \vec{r}_K|/c + t,$$

gdzie $\vec{r}_K = [0, 0, a]$ jest wektorem położenia kliszy (zaniedbujemy jej rozmiary).

Opis pręta: $\vec{r}_P(t) = [vt, y, 0]$ z warunkiem $y \in [-D, D]$ dla skończonego pręta o długości $2D$.

Na zdjęciu środek pręta przekracza punkt $x = 0$, $y = 0$. Zakładamy, że promień świetlny ze środka pręta był wysłany w chwili $t = 0$. Z tego wyznaczamy t_K: $t_K = a/c$

Równanie przybiera postać:

$$a - ct = \sqrt{(vt)^2 + y^2 + a^2}$$

Ponieważ interesuje nas tylko obraz, eliminujemy czas wykorzystując równanie ruchu pręta: $t = x/v$.

$$a - x/\beta = \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$$

gdzie $\beta = v/c$. Jest to już równanie opisujące obraz uzyskany na kliszy. Staramy się je uprościć i sprawdzić, czy nie jest to jakaś znana nam krzywa. Podnosimy do kwadratu i mnożymy przez β^2:

$$x^2 - 2ax\beta = \beta^2(x^2 + y^2)$$

$$x^2 - 2xa\beta\gamma^2 - (\beta\gamma y)^2 = 0,$$

gdzie $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Zbieramy wyrazy z x w kwadrat i dzielimy przez $(a\beta\gamma^2)^2$:

$$\frac{(x - a\beta\gamma^2)^2}{(a\beta\gamma^2)^2} - \frac{y^2}{(a\gamma)^2} = 1.$$

Jest to równanie hiperboli o asymptotach: $y = \pm(x/\beta\gamma - a\gamma)$.