Projekt Fizyka Plus nr POKL.04.01.02-00-034/11 współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki.

Kurs Plus - Fizyka - wersja dla nauczyciela
Materiały na kurs podstawowy

Przygotowanie: Piotr Nieżurawski, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego
e-mail: *Piotr.Niezurawski@fuw.edu.pl*

Gdy jestem pytany, dlaczego zajmuję się nauką, odpowiadam:
aby zaspokoić moją ciekawość, gdyż jestem z natury poszukiwaczem zrozumienia.
Jeśli nie zdziwiło cię coś przez cały dzień, to nie był on zbyt udany.
John A. Wheeler (1911–2008)

1 Zadanie - 7 ton

W trakcie akcji ratunkowej po wypadku w elektrowni jądrowej *Fukushima I* media doniosły, że pewnego dnia na reaktor zrzucono aż 7 ton wody. Oszacuj, na jakiej wysokości byłoby lustro wody, gdyby po uszczelnieniu sali, w której jesteście, wlano do niej tyle wody.

2 Zadanie - Srebrno-złota kula

Jubiler wykonał pełną kulę o promieniu $R = 10$ cm i masie $m = 60$ kg, wypełniając część kuli srebrem, a pozostałą część złotem. Jaką część objętości kuli zajmuje złoto? Gęstości srebra i złota są równe odpowiednio $\rho_S = 10490$ kg/m^3 i $\rho_Z = 19280$ kg/m^3. Objętość kuli o promieniu R jest równa $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Rozwiązanie

Podstawowe równanie to

$$m_S + m_Z = m \ ,$$

gdzie m_S i m_Z są masami srebra i złota. Z definicji gęstości:

$$\begin{aligned} m_S &= V_S \rho_S \\ m_Z &= V_Z \rho_Z \end{aligned}$$

Dodatkowo: $V_S + V_Z = V$. Dążymy do obliczenia V_Z/V. Eliminujemy z podstawowego równania V_S:

$$(V - V_Z)\rho_S + V_Z \rho_Z = m$$

Obliczamy V_Z i dzielimy przez V, uzyskując

$$\frac{V_Z}{V} = \frac{\frac{m}{V} - \rho_S}{\rho_Z - \rho_S} \approx 0{,}44$$

Odpowiedź: Złoto wypełnia około 44% kuli.

3 Zadanie – Liczba cząsteczek

Objętość jednego mola wodoru w warunkach normalnych, czyli przy temperaturze $0°$C i ciśnieniu 101325 Pa, wynosi około 22,4 dm^3. Oblicz, ile cząsteczek znajduje się w 1 μm^3 tego gazu. Liczba cząsteczek w jednym molu to około $6 \cdot 10^{23}$.

Rozwiązanie

Najpierw obliczę, ile cząsteczek gazu przypada na jednostkę objętości. Nazwę tę wielkość np. *koncentracją cząsteczek* i oznaczę jako n:

$$n = N_A/V \ ,$$

gdzie $V = 22.4$ dm^3. Podstawiam wartości liczbowe:

$$n = N_A/V = 6.022 \cdot 10^{23}/(22.4 \text{ dm}^3) \approx 0.27 \cdot 10^{23} \text{ dm}^{-3}$$

Liczbę cząsteczek w 1 μm^3 obliczam mnożąc n przez tę objętość:

$$n \cdot (1 \ \mu\text{m}^3) = 0.27 \cdot 10^{23} \cdot (1 \text{ dm})^{-3} \cdot (1 \ \mu\text{m})^3$$

Pamiętając, że 1 dm $= 10^{-1}$ m oraz $1 \ \mu m = 10^{-6}$ m upraszczam iloczyn ostatnich dwóch czynników:

$$(1 \text{ dm})^{-3} \cdot (1 \ \mu\text{m})^3 \ = [1 \cdot 10^{-6} \text{ m}/(1 \cdot 10^{-1} \text{ m})]^3 = \ [10^{-6}/10^{-1}]^3 = 10^{(-5)\cdot 3} = 10^{-15}$$

Otrzymuję ostatecznie wynik:

$$n \cdot (1 \ \mu\text{m}^3) = 0.27 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-15} = 0.27 \cdot 10^8$$

Odpowiedź: W warunkach normalnych w objętości równej 1 μm^3 znajduje się około $2.7 \cdot 10^7$ cząsteczek gazu.

4 Zadanie – Spacer biedronki

Biedronka idzie cały czas w jedną stronę po zewnętrznej stronie cienkiej obrączki. Promień obrączki jest równy $r = 1$ cm. Narysuj tor biedronki i wektor jej przemieszczenia oraz oblicz drogę S i wartość wektora przemieszczenia, jeśli biedronka pokonała:
a) $1/4$ obwodu obrączki,
b) jednokrotnie cały obwód obrączki,
c) czterokrotnie cały obwód obrączki.

Rozwiązanie

a) Torem jest ćwiartka okręgu. Droga:

$$S = \frac{1}{4} 2\pi r \approx 1{,}6 \text{ cm}$$

Wartość wektora przemieszczenia:

$$P = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2} \approx 1{,}4 \text{ cm}$$

b) Torem jest okrąg. Droga:

$$S = 2\pi r \approx 6{,}3 \text{ cm}$$

Wartość wektora przemieszczenia:

$$P = 0$$

Uwaga: Wiele osób wymaga pisania $P = 0$ cm, w tym wielu nauczycieli szkół średnich. Jest to nieistotne.

c) Torem jest okrąg. Droga:

$$S = 4 \cdot 2\pi r \approx 25 \text{ cm}$$

Wartość wektora przemieszczenia:

$$P = 0$$

5 Zadanie - Echo

Jeżeli dwa jednakowe dźwięki docierają do ucha w odstępie czasu dłuższym niż 0,05 s są słyszane przez człowieka oddzielnie (powstaje echo). Jeśli odstęp czasu jest krótszy od 0,05 s dwa dźwięki odbieramy jako jeden o przedłużonym czasie trwania (powstaje pogłos). Oblicz, w jakiej najmniejszej odległości od słuchacza powinna znajdować się pionowa ściana odbijająca dźwięk, aby po klaśnięciu w dłonie słuchacz usłyszał echo. Przyjmij, że wartość prędkości dźwięku w powietrzu wynosi 340 m/s.

Rozwiązanie

Odległość minimalna

$$d = ut/2 \ ,$$

gdzie u prędkość dźwięku, $t = 0{,}05$ s. Dźwięk przebywa drogę $2d$.

6 Zadanie – Seria

Żołnierz zaczął strzelać z karabinu do tarczy oddalonej od niego o $l = 400$ m. Pociski wylatują z częstością $f = 10$ Hz i poruszają się z prędkością $v = 900$ m/s. Prędkość dźwięku wynosi $u = 340$ m/s (w powietrzu o temperaturze 15°C). Oblicz:
a) ile czasu jeden pocisk leci od strzelca do tarczy,
b) ile czasu upłynęło od momentu, w którym pierwszy pocisk uderzył w tarczę, do chwili, gdy zainstalowany w tarczy mikrofon zarejestrował dźwięk wystrzału,
c) ile pocisków trafi w tarczę, zanim dotrze do niej dźwięk pierwszego wystrzału.

Rozwiązanie

a) Czas od pierwszego wystrzału po jakim dotrze do tarczy pierwszy pocisk:

$$t_1 = l/v$$

b) Czas od pierwszego wystrzału po jakim dotrze do tarczy dźwięk pierwszego wystrzału:

$$t_d = l/u$$

Czas, który upłynął od momentu, w którym pierwszy pocisk uderzył w tarczę, do chwili, gdy zainstalowany w tarczy mikrofon zarejestrował dźwięk wystrzału:

$$T = t_d - t_1$$

c) Interwał czasu między wystrzeleniem dwóch kolejnych pocisków:

$$\Delta t = 1/f$$

Jest to również interwał czasu między dotarciem dwóch kolejnych pocisków do tarczy.

A więc w tarczę trafi n pocisków

$$n = \left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor + 1 \ ,$$

gdzie korzystamy z funkcji „podłoga” (największa liczba całkowita, nie większa od argumentu). Oczywiście tę funkcję musimy wprowadzić. Dodajemy '1', gdyż musimy uwzględnić pierwszy pocisk – liczba pocisków jest równa liczbie pełnych interwałów plus 1. Proponuję rozrysować jeszcze interwały czasu.

Wynik:

$$n = \left\lfloor l(u^{-1} - v^{-1})f + 1 \right\rfloor$$

Wstawiając wartości liczbowe:

$$n = \left\lfloor 400 \text{ m}(340^{-1} - 900^{-1})\text{s/m} \cdot 10 \text{ s}^{-1} + 1 \right\rfloor = \lfloor 8,32 \rfloor = 8$$

Wynik nie jest zbyt optymistyczny...

7 Zadanie – Osaczona mucha'

Mucha wystartowała z szyby samochodu w momencie, gdy znajdowała się w odległości $L = 10$ m od ściany domu (start muchy traktujemy jako jej pierwszy pobyt przy szybie). Samochód zaczął się wtedy poruszać i szyba zbliża się do ściany z prędkością $v = 3,6$ km/h. Oszalała mucha lata tam i z powrotem między szybą a ścianą z prędkością $u = 4$ m/s; owad porusza się zawsze po prostej prostopadłej do ściany i przechodzącej przez punkt startu na szybie. Samochód nagle zatrzymuje się, gdy szyba znajduje się w odległości $l = 1$ m od ściany.
a) Wykonaj rysunek, zaznaczając ścianę, szybę w odległościach L i l oraz początkowe położenie muchy.
b) Oblicz czas ruchu samochodu (t).
c) Oblicz drogę S, jaką przebyła mucha do momentu, gdy szyba znalazła się w odległości $l = 1$ m od ściany.

d) Oblicz, ile czasu mija między pierwszym i drugim pobytem muchy przy szybie t_{12} (zastanów się jaką drogę przebywa mucha między tymi chwilami).

Rozwiązanie

b oraz c) Czas ruchu samochodu:

$$t_S = (L - l)/v$$

Droga, jaką przebyła mucha:

$$S_m = ut_S = u(L - l)/v$$

Wstawiając wartości:

$$S_m = 4 \text{ m/s}(10 \text{ m} - 1 \text{ m})/(3,6 \text{ km/h}) = 36 \text{ m}$$

d) Czas między startem (pierwszy pobyt przy szybie) i drugim pobytem przy szybie obliczam z równania:

(droga muchy) = 2 * (odległość szyby od ściany) - (droga szyby)

$$t_{12}u = 2L - t_{12}v$$

Otrzymuję:

$$t_{12} = \frac{2L}{u + v} = 4 \text{ s}$$

8 Zadanie - Wioślarz

Wioślarz płynie łodzią w górę rzeki. Gdy przepływał pod mostem, z jego łodzi wypadło koło ratunkowe. Po czasie $t = 15$ min wioślarz zauważył zgubę. Natychmiast zaczął płynąć w dół rzeki i dopędził zgubione koło w odległości $s = 1$ km od mostu. Obliczyć prędkość prądu rzeki, jeżeli wioślarz cały czas wiosłował z jednakowym wysiłkiem.
Proszę na początku rozwiązać zadanie w myślach, bez wypisywania wzorów.

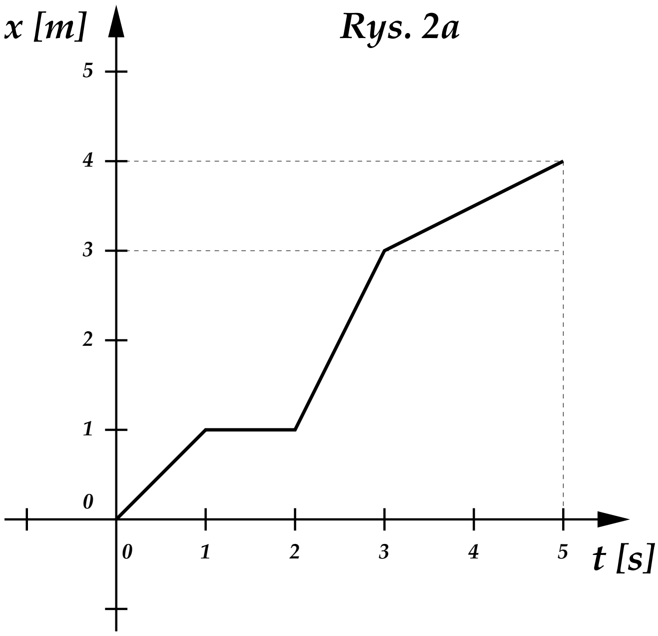
Rozwiązanie

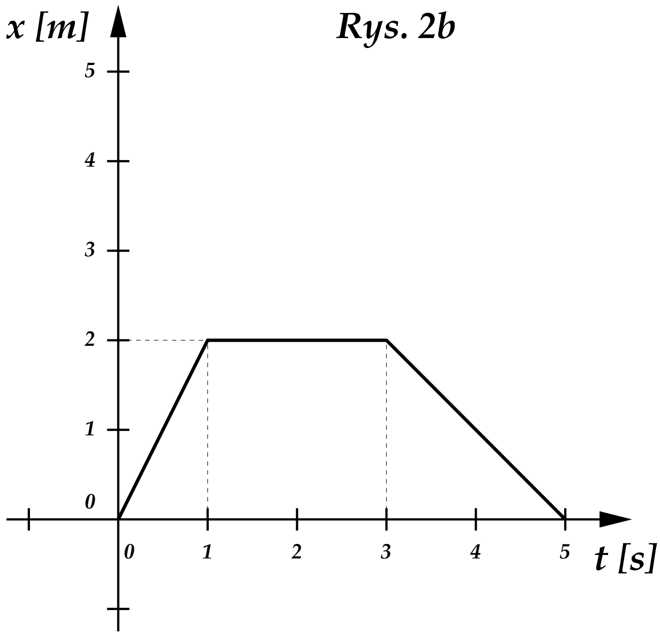
Względem wody szybkość wioślarza jest stała, więc płynął przez czas $2t = 30$ min. Prędkość nurtu

$$u = \frac{s}{2t} = 2 \text{ km/h}$$

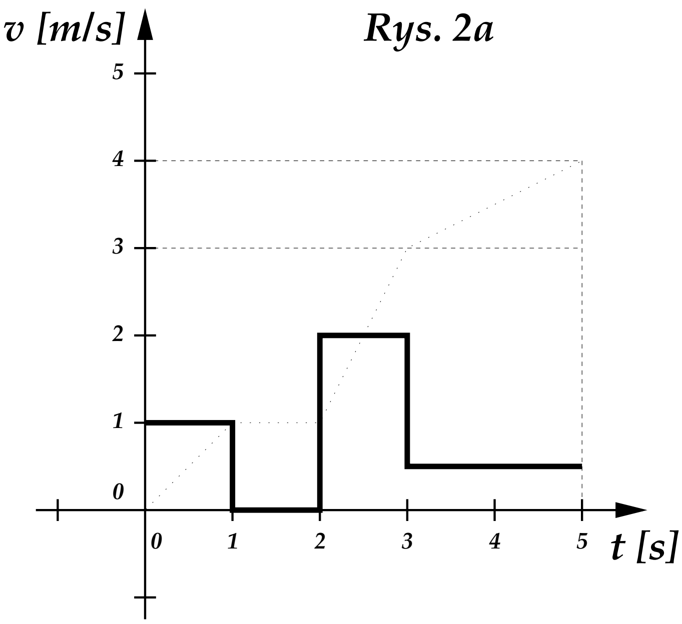
9 Zadanie - Wykresy ruchu 1D

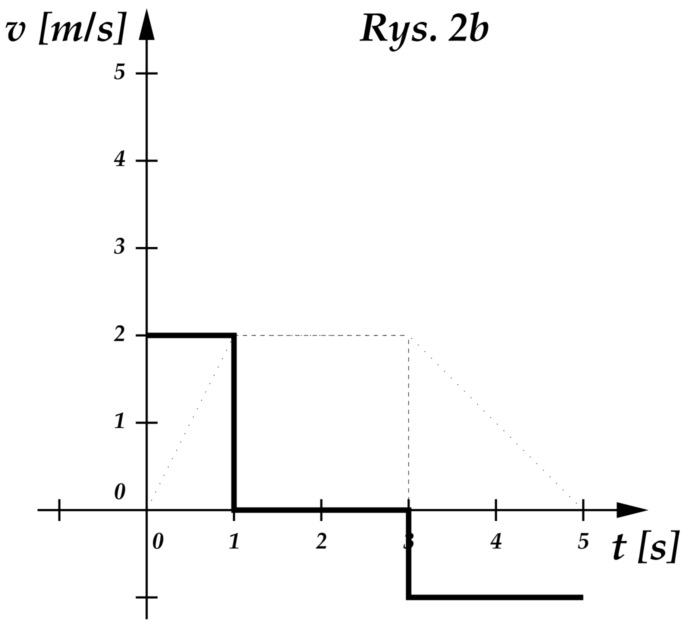
Rysunki 2a oraz 2b przedstawiają zależność współrzędnej $x(t)$ dla pewnego ciała. Przeanalizuj te ruchy, oblicz prędkość w poszczególnych jego fazach (wykonaj wykresy prędkości chwilowej), oblicz również szybkość średnią całego ruchu oraz wartość wektora przemieszczenia.





Rozwiązanie





Szybkości średnie całego ruchu i składowa wektorów przemieszczenia:

$$\begin{aligned}
\langle u_a \rangle &= \frac{4}{5}\ \text{m/s} \\
\Delta x_a &= 4\ \text{m} \\
\langle u_b \rangle &= \frac{4}{5}\ \text{m/s} \\
\Delta x_b &= 0\ \text{m}
\end{aligned}$$

10 Zadanie - Egzamin u Fermiego

Oszacuj:

1. Liczbę pomieszczeń w budynku, w którym się znajdujesz.
2. Grubość śladu kredy na tablicy.
3. Czas potrzebny na wypłynięcie 1 m^3 wody z całkowicie odkręconego kranu.
4. Liczbę monet o nominale co najwyżej 2 gr znajdujących się w sali, w której odbywają się zajęcia.
5. Liczbę szkół podstawowych w Polsce.
6. Liczbę lekarzy i lekarzy dentystów w Polsce.
7. Utarg miesięczny warszawskiego taksówkarza.

Wskazówki

Można próbować różnych podejść do każdego z problemów. W każdym przypadku wymaga to jednak pomnożenia kilku łatwiej oszacowanych liczb. Np. liczba godzin pracy taksówkarza, średnia prędkość, średnia długość trasy, stawka za kilometr, opłata początkowa itd. Część oszacowań łatwo sprawdzić (prostym eksperymentem, obserwacją lub w roczniku statystycznym).

11 Zadanie - Łódka (prostopadle względem brzegu)

Przez rzekę przepływa łódka, która jest cały czas skierowana prostopadle do brzegu. Prędkość nurtu rzeki wynosi v_X, a prędkość łódki względem wody v_Y. Napisz *parametryczne* równanie toru, czyli zależność wektora położenia od czasu $\vec{r}(t)$ (wektor $\vec{r}(t)$ wyraź przez funkcje $x(t),\ y(t),\ z(t)$) w układzie związanym z brzegiem, w którym oś X wyznacza linię brzegową, a oś Y zawarta jest w płaszczyźnie wyznaczonej przez lustro wody. Parametrem w tych równaniach jest czas t. Jeśli z równań zostanie wyeliminowany czas, to uzyskamy zależność $y(x)$, czyli równanie toru na płaszczyźnie. Jaka jest zależność nachylenia toru łodzi względem brzegu od składowych prędkości?

Rozwiązanie

Wykonujemy odpowiedni rysunek.

Można podać rozwiązanie od razu, ale warto przeprowadzić poniższe rachunki, aby studenci oswajali się z zapisem wektorowym.

Prędkość łódki względem brzegu: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

W wybranym układzie współrzędnych:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= v_Y[0,\,1] = [0,\,v_Y]\\ \vec{v}_2 &= v_X[1,\,0] = [v_X,\,0]\end{aligned}$$

A więc: $\vec{v} = [v_X,\,v_Y]$

Równanie ruchu łódki:

$$\vec{r}(t) = \vec{v}t + \vec{r}_0$$

Przy warunku początkowym $\vec{r}_0 = \vec{r}(t=0) = [0,\,0]$ parametryczne równanie ruchu łódki (rozpisane powyższe równanie wektorowe):

$$
\begin{aligned}
x(t) &= v_X t \\
y(t) &= v_Y t \\
z(t) &= 0
\end{aligned}
$$

Obliczając czas z pierwszego równania i wstawiając do drugiego:

$$y(x) = xv_Y/v_X$$

Widać zachowanie zgodne z intuicją: szybki nurt w porównaniu z prędkością łódki, to tor bardzo długi, nachylony pod niewielkim kątem do brzegu itd. Współczynnik przy x jest tangensem kąta nachylenia toru łódki do brzegu jest równy v_Y/v_X.

Proszę zadać pytanie, czy są osoby, które miały do czynienia z całkowaniem. Jeśli tak, to...

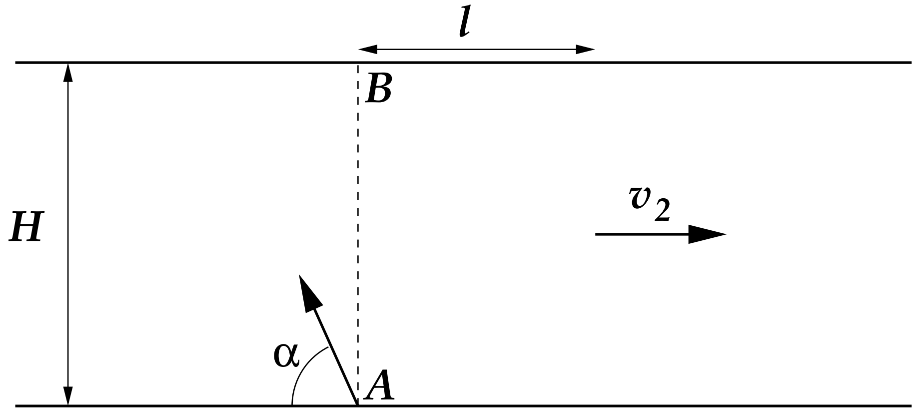
Wstawka z rachunku całkowego: otrzymywanie równania ruchu, jeśli dana jest stała prędkość $\vec{v}_0$ (zero dla podkreślenia tego, że wektor nie zmienia się).

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{r}}{dt} &= \vec{v}_0 \\
\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}' &= \int_{t_0}^{t} \vec{v}_0 \, dt' = \vec{v}_0 \int_{t_0}^{t} dt' \\
\vec{r} - \vec{r}_0 &= \vec{v}_0 (t - t_0) \\
\vec{r} &= \vec{v}_0 (t - t_0) + \vec{r}_0
\end{aligned}
$$

12 Zadanie - Łódka (ukośnie względem brzegu)

Przewoźnik, który przeprawia się przez rzekę o szerokości H z punktu A, przez cały czas kieruje łódź pod kątem α względem brzegu rzeki (czyli między brzegiem a prostą przechodzącą przez dziób i środek rufy jest kąt α; Rys. 3). Wyznacz prędkość łódki względem wody $\vec{v}_1$, jeśli prędkość wody względem brzegu wynosi $\vec{v}_2$ (równoległa do brzegu), a łódkę zniosło na odległość l poniżej punktu B.

Rys. 3



Rozwiązanie

Prędkość łódki względem brzegu: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

W wybranym układzie współrzędnych:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= v_1[-\cos\alpha,\ \sin\alpha]\\ \vec{v}_2 &= v_2[1,\ 0]\end{aligned}$$

A więc: $\vec{v} = [v_2 - v_1\cos\alpha,\ v_1\sin\alpha]$

Przy warunku początkowym $\vec{r}(t=0) = [0,\ 0]$ równanie ruchu łódki:

$$\begin{aligned}x &= v_X t = (v_2 - v_1\cos\alpha)t\\ y &= v_Y t = v_1\sin\alpha t\end{aligned}$$

Łódka przepływa rzekę w czasie T, $y(t=T) = H$, i znajduje się o l poniżej punktu B, $x(t=T) = l$. Eliminując T z tych dwóch równań, otrzymujemy wartość prędkości łódki:

$$v_1 = v_2/(l\sin\alpha/H + \cos\alpha)$$

13 Zadanie - Fregata

Fregata, płynąc wzdłuż równoleżnika na szerokości geograficznej $60°$, zmieniła pozycję o $15°$ długości geograficznej (czyli o $\pi/12$ radianów), a następnie, płynąc wzdłuż południka, zmieniła pozycję o $18°$ szerokości geograficznej (czyli o $\pi/10$ radianów). Oblicz drogę, jaką przebył statek, zakładając, że poruszał się po sferze o promieniu $R_Z = 6370$ km.

Rozwiązanie

Pewnie przyda się krótkie wyjaśnienie miary łukowej.

Równoleżnik jest okręgiem o promieniu

$$r = R_Z/2\ ,$$

co łatwo pokazać na rysunku, z trójkąta równobocznego. Potem można napisać

$$r = R_Z\cos 60° = R_Z/2$$

(o funkcjach cos() i sin() będą mieli opowiadane na *Kursie Plus - Matematyka*)

Droga wzdłuż równoleżnika:

$$S_1 = r\pi/12$$

Dla tych, co nie słyszeli o radianach:

$$S_1 = 2\pi r(15°/360°) = 2\pi r(1/24) = r\pi/12$$

Południk jest fragmentem okręgu o promieniu R_Z. Droga wzdłuż południka:

$$S_2 = R_Z\pi/10$$

Droga całkowita:

$$S = S_1 + S_2 = r\pi/12 + R_Z\pi/10 = R_Z\pi(1/24 + 1/10) = R_Z\pi 17/120$$

$$S \approx 2835 \text{ km}$$

14 Zadanie - Rozmiar atomu złota

Oszacuj średnicę atomu złota $^{197}_{79}\mathrm{Au}$. Gęstość złota jest równa $\rho_Z = 19280$ kg/m^3.

Rozwiązanie

Objętość 1 mola złota to

$$V = \frac{197\ \mathrm{g}}{\rho_Z}$$

W przybliżeniu objętość na jeden atom to

$$V/N_A$$

Zakładając, że atomy siedzą w niezachodzących na siebie sześcianach, średnica atomu to

$$D = (V/N_A)^{1/3} \approx 3 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm} = 3 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

15 Zadanie - Ruch jednostajnie przyśpieszony

W pewnym układzie kartezjańskim (np. związanym z ziemią) wektor położenia $\vec{r}$ małego kamyka zależy od czasu t następująco:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}_0(t - t_0)^2\ ,$$

gdzie wektory $\vec{r}_0,\ \vec{v}_0,\ \vec{a}_0$ są stałe (czyli nie zależą od czasu).

Jakie jest znaczenie stałej t_0?
Wychodząc z definicji prędkości

$$\vec{v}(t) = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \qquad \text{przy}\ \ \Delta t \to 0$$

oraz przyśpieszenia

$$\vec{a}(t) = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \qquad \text{przy}\ \ \Delta t \to 0\ ,$$

oblicz prędkość oraz przyśpieszenie kamyka.

Rozwiązanie

Znaczenie t_0:

$$\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$$

Prędkość:

$$\vec{v}(t) = \frac{\vec{v}_0\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}_0[(t + \Delta t - t_0)^2 - (t - t_0)^2]}{\Delta t} = \vec{v}_0 + \frac{1}{2}\vec{a}_0[2(t - t_0) + \Delta t] = \vec{v}_0 + \vec{a}_0(t - t_0) \quad \text{przy}\ \ \Delta t \to 0$$

Przyśpieszenie:

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{a}_0\Delta t}{\Delta t} = \vec{a}_0 \quad \text{przejście}\ \Delta t \to 0\ \text{niczego nie zmienia}$$

Powtarzamy rachunek, używając oznaczeń pochodnych:

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0(t - t_0) \\ \vec{a}(t) &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_0\end{aligned}$$

16 Zadanie – Pionowy strzał

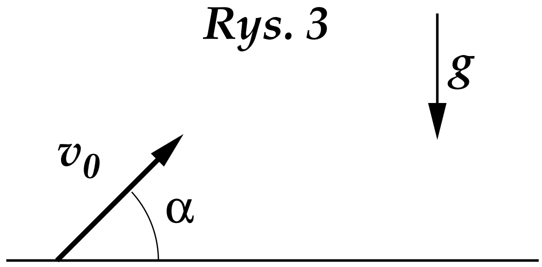
Z ustawionej pionowo lufy wystrzelono stalową kulę o masie $2{,}5$ kg. Kula, gdy opuszczała lufę, poruszała się z prędkością $190{,}8$ km/h. Oblicz, po jakim czasie od chwili opuszczenia lufy kula znajdowała się na wysokości 63 m nad wylotem lufy oraz kiedy do lufy wleciała. Przyjmij, że przyśpieszenie ziemskie jest równe $9{,}8$ m/s^2. Pomiń wpływ oporu powietrza.

Rozwiązanie

Po około $1{,}36$ s (w trakcie lotu do góry) oraz $9{,}46$ s (spadając) kula znajdowała się na wysokości 63 m nad wylotem lufy, a po około $10{,}82$ s wleciała do lufy.

17 Zadanie - Rzut ukośny

Chłopiec kopnął piłkę, nadając jej prędkość v_0 skierowaną pod kątem α do poziomu (Rys. 3). Napisz parametryczne równanie toru. Udowodnij, że torem ruchu jest parabola.



Rozwiązanie

Równanie ruchu:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \vec{a}(t - t_0)^2/2$$

Wybieram $t_0 = 0$ i układ współrzędnych, w którym:

$$\begin{aligned}\vec{r}_0 &= [0,\ 0] \\ \vec{v}_0 &= [v_0 \cos\alpha,\ v_0 \sin\alpha] \\ \vec{a} &= [0,\ -g]\end{aligned}$$

Równanie parametryczne toru:

$$\begin{aligned}x &= v_0 \cos\alpha t \\ y &= v_0 \sin\alpha t - \frac{1}{2} g t^2\end{aligned}$$

Jest to już właściwie dowód tezy (jest to właśnie równanie paraboli). Znowu uzyskujemy równianie bez parametru – obliczamy t np. z pierwszego równania i wstawiamy do drugiego:

$$y = \tan\alpha\, x - \frac{g}{2(v_0\cos\alpha)^2}x^2$$

18 Zadanie - Rzut o ścianę

Z wysokości $h = 20$ m wyrzucono w kierunku poziomym ciało z prędkością $v_0 = 15$ m/s. W odległości $d = 30$ m znajduje się pionowa ściana. Oblicz, na jakiej wysokości ciało uderzyło w ścianę.

19 Zadanie - Zmienne przyśpieszenie

W pewnym układzie kartezjańskim (np. związanym z ziemią) wektor położenia $\vec{r}$ małego kamyka zależy od czasu t następująco:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{b}_0(t - t_0)^3 \ ,$$

gdzie wektory $\vec{r}_0,\ \vec{b}_0$ są stałe.
Jakie jest znaczenie stałej t_0?
Wychodząc z definicji prędkości

$$\vec{v}(t) = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \qquad \text{przy} \ \ \Delta t \to 0$$

oraz przyśpieszenia

$$\vec{a}(t) = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \qquad \text{przy} \ \ \Delta t \to 0 \ ,$$

oblicz prędkość i przyśpieszenie kamyka.

20 Zadanie - Spadochroniarz

Spadochroniarz o masie 75 kg opada na spadochronie pionowo w dół ze stałą prędkością o wartości 4 m/s. Oblicz siłę oporów ruchu działającą na spadochroniarza wraz ze spadochronem. Z której zasady dynamiki skorzystałeś?

21 Zadanie - Ciekawy skutek braku masy

Udowodnij następujące twierdzenie.

Wypadkowa siła działająca na nieważkie ciało jest zawsze równa 0.

Jest ono bardzo przydatne zagadnieniach, w których występują nieważkie liny, pręty, bloczki itd.

Rozwiązanie

Korzystamy z II zasady dynamiki:

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Jeśli $m = 0$, to oczywiście $F = 0$. Warto o tym pamiętać, gdyż często spotykam błędne uzasadnienia faktu, że np. siły działające na nieważką linkę z obu stron mają taką samą wartość.

22 Zadanie - Statek kosmiczny

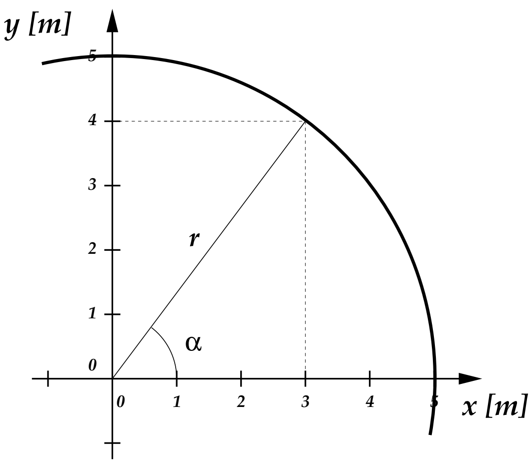
Statek kosmiczny spoczywał, a następnie rozpadł się na dwie części: jedna część o masie 5000 kg porusza się z prędkością 20 m/s. Oblicz masę drugiego fragmentu statku, jeśli jego prędkość jest równa 4 m/s.

23 Zadanie - Ruch po okręgu, przyśpieszenie dośrodkowe

Punkt materialny porusza się po okręgu o promieniu R. Wartość prędkości kątowej wynosi ω i jest stała. Napisz parametryczne równanie toru.
Narysuj wektor prędkości w kilku punktach toru i określ zależność składowych prędkości od czasu.
Rozpatrując zmianę wektora prędkości w bardzo krótkim przedziale czasu, określ kierunek, zwrot i wartość przyśpieszenia punktu materialnego.

Rozwiązanie

Parametryczne równanie toru.



$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha \\ y &= r\sin\alpha \end{aligned}$$

Z treści wiadomo, że

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \omega = \text{const.}$$

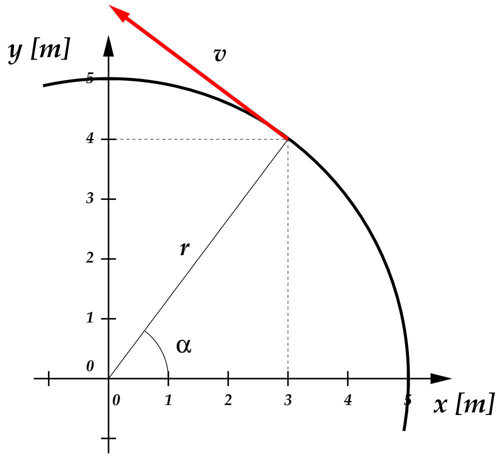
A więc

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \omega(t - t_0)$$

analogicznie jak położenie x (odpowiednik α) w ruchu ze stałą prędkością v (odpowiednik ω). Jeśli wybierzemy sobie $t_0 = 0$ oraz $\alpha_0 = 0$ (czyli w chwili $t = 0$ punkt jest na dodatniej półosi X), to dostaniemy:

$$\begin{aligned} x(t) &= r\cos(\omega t) \\ y(t) &= r\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Wektor prędkości ciała poruszającego się po gładkiej krzywej jest zawsze styczny do tej krzywej. Wynika to z definicji stycznej: Styczna do krzywej w pewnym punkcie A to prosta przechodząca przez dwa punkty należące do krzywej, gdy dążą one do punktu A.

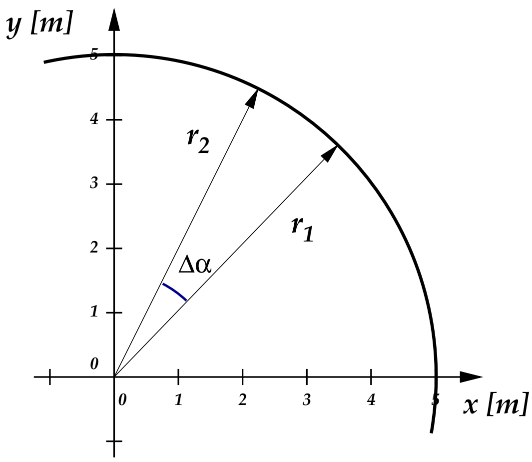


Wektor prędkości zależy więc od czasu następująco:

$$\begin{aligned} v_X(t) &= -v \sin \alpha = -v \sin(\omega t) \\ v_Y(t) &= v \cos \alpha = v \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Obliczamy wartość prędkości liniowej:

$$v = |\vec{v}| = |\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}| = |\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t}| \quad \text{przy} \;\; \Delta t \to 0$$



Dla bardzo małych fragmentów okręgu

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \approx r\,\Delta\alpha \quad \text{przy} \;\; \Delta t \to 0$$

(im mniejsza długość wektorów przesunięcia, tym lepiej suma ich długości określa drogę).

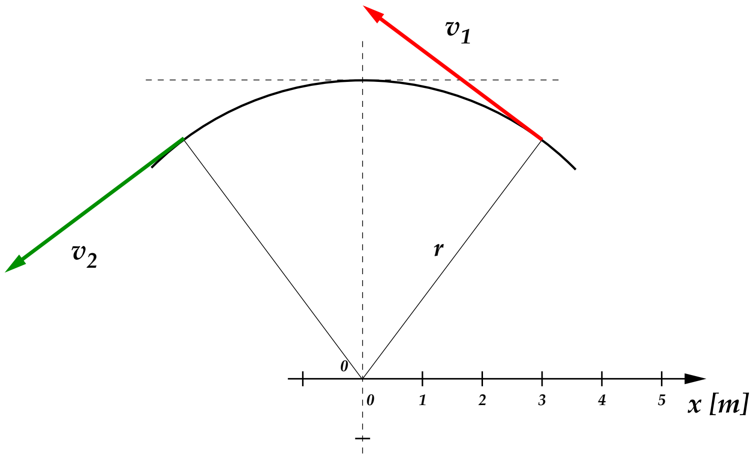
Otrzymujemy wartość prędkości liniowej:

$$v = |\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t}| = \frac{r\,\Delta\alpha}{\Delta t} = r\omega \quad \text{przy} \;\; \Delta t \to 0$$

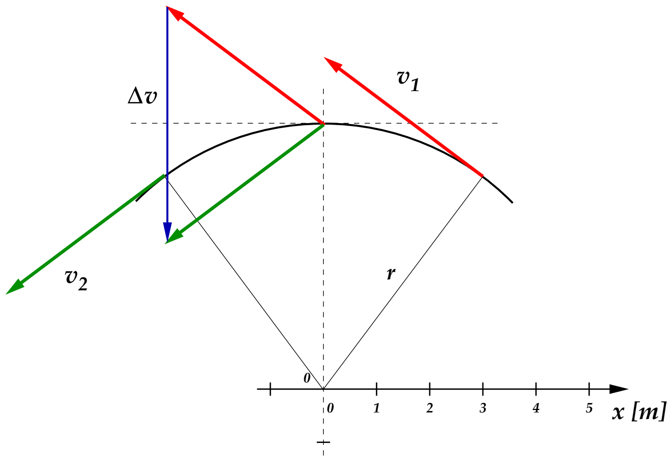
Wynik ten uzyskujemy również obliczając szybkość (dla dowolnego przedziału czasu):

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{r\,\Delta\alpha}{\Delta t} = r\omega$$

Aby określić przyśpieszenie, rozpatruję zmianę wektora prędkości $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ między punktami symetrycznymi względem osi Y:



Przenoszę te wektory na punkt pośrodku (przy zmniejszaniu Δt to dla tego punktu określimy przyśpieszenie) i wyznaczam $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$:



Kierunek $\Delta \vec{v}$ jest prostą między punktem pośrodku punktów 1 i 2 a środkiem okręgu (kierunek osi Y w tym wypadku); zwrot jest do środka okręgu. Nie zmieni się to przy zmniejszaniu długości łuku między punktami, w których mierzymy prędkości. Takie własności będzie mieć więc wektor przyśpieszenia. Możemy zapisać:

$$\vec{a} = a\frac{-\vec{r}}{r}$$

czyli

$$\begin{aligned} a_X(t) &= -a\cos(\omega t) \\ a_Y(t) &= -a\sin(\omega t) \end{aligned}$$

Obliczamy wartość przyśpieszenia (analogicznie do wartości prędkości):

$$a = |\vec{a}| = |\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}| = |\frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t}| \quad \text{przy} \quad \Delta t \to 0$$

Dla bardzo małych fragmentów okręgu

$$|\vec{v}_2 - \vec{v}_1| \approx v\,\Delta\alpha \quad \text{przy} \quad \Delta t \to 0$$

Otrzymujemy wartość przyśpieszenia:

$$a = \frac{v\,\Delta\alpha}{\Delta t} = v\omega \quad \text{przy} \quad \Delta t \to 0$$

Jeśli ktokolwiek ze studentów uczył się już o pochodnych... Zastosowanie rachunku różniczkowego.

Prędkość:

$$\begin{aligned} v_X = \frac{dx}{dt} &= r\frac{d}{dt}\cos\alpha = -r\sin\alpha\frac{d}{dt}\alpha = -r\omega\sin(\omega t) \\ v_Y = \frac{dy}{dt} &= r\frac{d}{dt}\sin\alpha = r\cos\alpha\frac{d}{dt}\alpha = r\omega\cos(\omega t) \end{aligned}$$

Przyśpieszenie:

$$\begin{aligned} a_X = \frac{dv_X}{dt} &= -r\omega\frac{d}{dt}\sin\alpha = -r\omega\cos\alpha\frac{d}{dt}\alpha = -r\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 x \\ a_Y = \frac{dv_Y}{dt} &= r\omega\frac{d}{dt}\cos\alpha = -r\omega\sin\alpha\frac{d}{dt}\alpha = -r\omega^2\sin(\omega t) = -\omega^2 y \end{aligned}$$

24 Zadanie - Stała szybkość i przyśpieszenie

Samochód jedzie po łuku o promieniu $R = 30$ m ze stałą szybkością $u = 60$ km/h. Z jakim przyśpieszeniem porusza się to auto?

25 Zadanie - Analiza wymiarowa

Rozważając tylko wymiary istotnych wielkości, zaproponuj zależność

1. prędkości v [m/s] od przyśpieszenia a [m/s^2] i czasu t [s].
2. okresu wahadła T [s] od przyśpieszenia ziemskiego g [m/s^2] i długości wahadła l [m].
3. masy kuli m [kg] od jej promienia R [m] i gęstości materiału ρ [kg/m^3].
4. długości fali λ [m] od jej prędkości v [m/s] i częstości f [Hz].
5. ciśnienia hydrostatycznego p [Pa] od przyśpieszenia ziemskiego g [m/s^2], głębokości cieczy h [m] i jej gęstości ρ [kg/m^3].
6. okresu wahadła T [s] od współczynnika sprężystości k [N/m] i masy wahadła m [kg].
7. prędkości fali wodnej (na płytkiej wodzie) od przyśpieszenia ziemskiego g [m/s^2], głębokości wody h [m].
8. prędkości fali wodnej (na głębokiej wodzie) od przyśpieszenia ziemskiego g [m/s^2] i długości fali λ [m].
9. ciśnienia dynamicznego p_d [Pa] od prędkości cieczy v [m/s] i jej gęstości ρ [kg/m^3].
10. prędkości fali na strunie od napięcia struny T [N], masy struny m [kg] i jej długości l [m].

Załóż, że poza wymienionymi wielkościami prawdziwe równanie może zawierać jedynie bezwymiarowe liczby, których nie musisz uwzględniać w proponowanej zależności.

26 Zadanie - Jądro atomu złota

Oszacuj, jaką część objętości próbki złota ${}^{197}_{79}\mathrm{Au}$ zajmują jądra atomowe tego pierwiastka. Gęstość złota jest równa $\rho_Z = 19280$ kg/m^3. Promień jądra atomu jest równy około $R = R_0 A^{1/3}$, gdzie $R_0 = 1{,}2 \cdot 10^{-15}$ m, a A jest liczbą masową atomu.

Rozwiązanie

Pomocniczy rachunek, aby się zorientować co do wartości R: $\sqrt[3]{197} \approx 5.8$. W rozwiązaniu niepotrzebne.

Definicje

Wersorem związanym z wektorem $\vec{A}$ (wektor $\vec{A}$ ma długość $|\vec{A}| = A$) nazywamy wektor:

$$\hat{e}_A = \vec{A}/A$$

Oczywiste związki: $|\hat{e}_A| = 1$ oraz $\vec{A} = A\hat{e}_A$.

Wersory bazowe układu kartezjańskiego X, Y, Z:

$$\hat{e}_X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{e}_Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{e}_Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Równoważny zapis wektora:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{pmatrix} = v_X\hat{e}_X + v_Y\hat{e}_Y + v_Z\hat{e}_Z$$

Iloczyn wektorowy wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ to wektor $\vec{W}$:

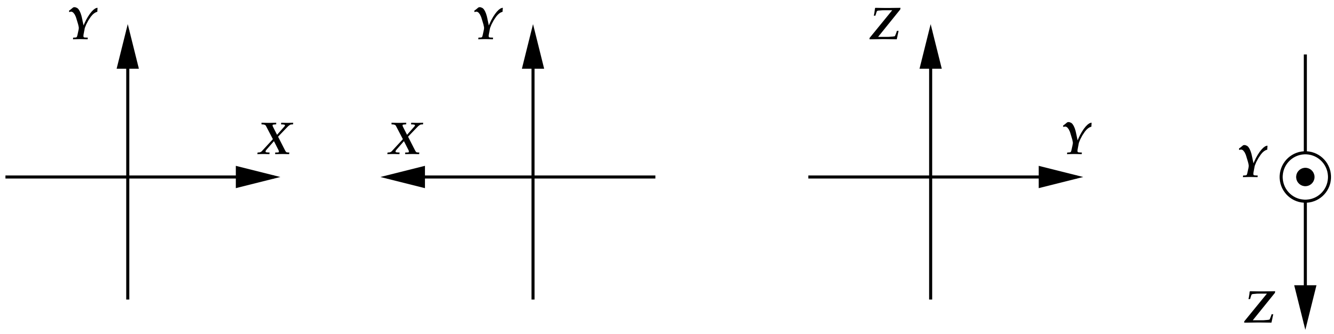
$$\vec{W} = \vec{A} \times \vec{B} = AB\sin\alpha\hat{e}_W \ ,$$

gdzie wersor $\hat{e}_W$ jest prostopadły do płaszczyzny rozpiętej przez wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$, gdy zaczepimy je w tym samym punkcie; zwrot wersora wyznaczamy za pomocą reguły śruby prawoskrętnej: śrubę ustawiamy prostopadle do płaszczyzny rozpiętej przez wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$, śrubę obracamy po wybranym kącie α od wektora $\vec{A}$ do wektora $\vec{B}$, powoduje to wkręcanie w płaszczyznę lub wykręcanie śruby, zwrot wersora $\hat{e}_W$ jest zgodny z ruchem postępowym śruby.[1]
Z definicji wynika związek: $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
W tzw. *prawoskrętnym układzie kartezjańskim*: $\hat{e}_Z = \hat{e}_X \times \hat{e}_Y$

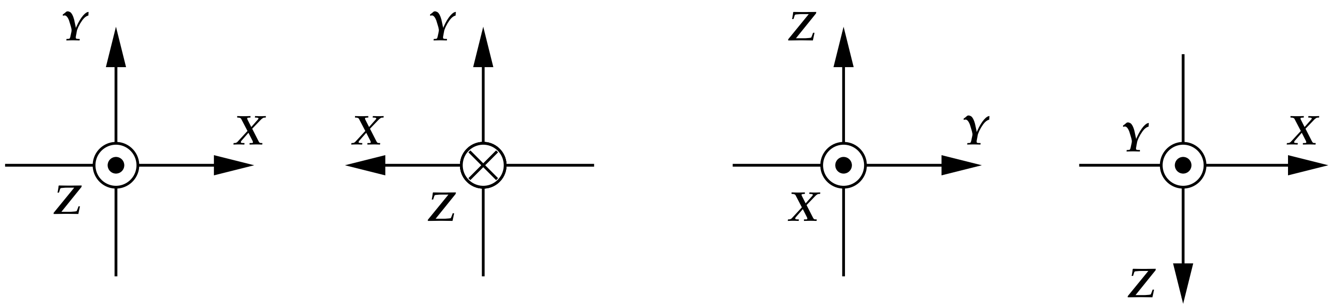
[1]Jeśli ustalimy, że z dwóch kątów między wektorami wybieramy mniejszy (wtedy $\alpha \in [0,\ \pi]$), to $\sin\alpha \geq 0$ i zwrot iloczynu wektorowego jest zgodny ze zwrotem $\hat{e}_W$.

27 Zadanie – Osie układu kartezjańskiego prawoskrętnego

Zaznacz brakującą oś (kierunek, zwrot, symbol).



Rozwiązanie



Definicja

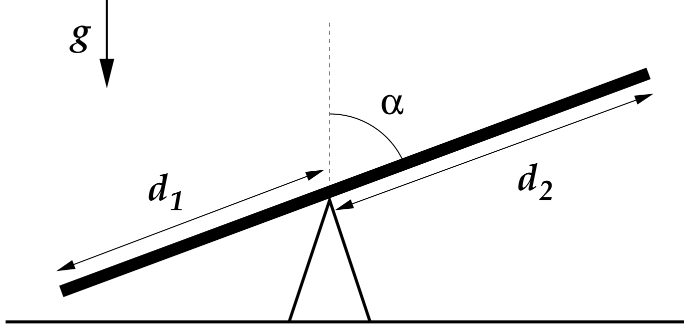
Moment siły $\vec{M}$ spowodowany przez siłę $\vec{F}$ działającą na ramieniu $\vec{r}$:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

28 Zadanie - Huśtawka

Na bardzo lekkiej huśtawce, tworzącej z pionem kąt α (Rys. 5) siedzi dwoje dzieci. Dziecko o masie m_1 siedzi w odległości d_1 od punktu podparcia huśtawki, a dziecko o masie m_2 w odległości d_2.
a) Wyznacz sumę momentów sił działających na huśtawkę względem punktu jej podparcia.
b) Jaka powinna być wartość m_2, aby huśtawka się nie poruszała, jeśli $m_1 = 30$ kg, $d_1 = 2$ m oraz $d_2 = 1.5$ m?

Rys. 5



Rozwiązanie

Niech oś Z ma kierunek prostopadły do rysunku i ***zwrot do nas***. Względem punktu podparcia:

$$\begin{aligned}\vec{M}_1 &= [0,\,0,\,d_1m_1g\sin\alpha] = d_1m_1g\sin\alpha\hat{e}_Z\\ \vec{M}_2 &= [0,\,0,\,-d_2m_2g\sin\alpha] = -d_2m_2g\sin\alpha\hat{e}_Z\end{aligned}$$

gdzie korzystamy z tego, że $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$. Moment siły reakcji podparcia wynosi 0, gdyż ramię tej siły ma zerową długość. Suma momentów:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 = [0,\,0,\,d_1m_1g\sin\alpha - d_2m_2g\sin\alpha] = (d_1m_1 - d_2m_2)g\sin\alpha\hat{e}_Z$$

Huśtawka nie będzie się poruszać, gdy działające na nią wypadkowa siła i wypadkowy moment siły znikają. Drugi warunek prowadzi do związku:

$$d_1m_1 - d_2m_2 = 0$$

Huśtawka nie będzie się poruszać, gdy $m_2 = m_1d_1/d_2 = 30\text{ kg}\cdot 2\text{ m}/1.5\text{ m} = 40\text{ kg}$.

Definicja

Położenie środka masy $\vec{R}_{CM}$:

$$\vec{R}_{CM} = (\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_km_k)\ /\ (\sum_{k=1}^{N}m_k)\ ,$$

gdzie indeks k wskazuje małe elementy, na które podzielono obiekt; masa elementu k jest równa m_k, a wektor $\vec{r}_k$ wskazuje położenie elementu k (rozmiary liniowe elementu są na tyle małe, że nieistotne jest, który punkt elementu wskazuje wektor $\vec{r}_k$).

29 Zadanie - Trzy kule

Środki trzech jednorodnych kul znajdują się na jednej prostej. Środek kuli o masie m_B znajduje się w odległości d_A od środka skrajnej kuli o masie m_A oraz w odległości d_C od środka skrajnej kuli o masie m_C. Oblicz odległość środka masy tych trzech kul od środka kuli o masie m_A. Uzyskaj również wynik liczbowy, jeśli $m_A = 4$ kg, $m_B = 1$ kg, $m_C = 2$ kg, $d_A = 1$ m oraz $d_C = 2$ m.

Rozwiązanie

Twierdzenie

Jeśli dla każdego k wektor $\vec{r}_k$ wskazuje położenie środka masy elementu k, to położenie środka masy wszystkich elementów wskazuje wektor $\vec{R}_{CM}$:

$$\vec{R}_{CM} = (\sum_{k=1}^{N}\vec{r}_km_k)/(\sum_{k=1}^{N}m_k)$$

gdzie m_k oznacza masę elementu k. (Czyli wzór analogiczny do definiującego środek masy).

Koniec twierdzenia

Wektory położenia środków ciężkości kul:

$$\begin{aligned} \vec{r}_A &= 0\hat{e}_X \\ \vec{r}_B &= d_A\hat{e}_X \\ \vec{r}_C &= (d_A + d_C)\hat{e}_X \end{aligned}$$

Położenie środka masy wskazuje wektor:

$$\vec{R} = (\sum_i \vec{r}_i m_i)/(\sum_i m_i) = (\vec{r}_A m_A + \vec{r}_B m_B + \vec{r}_C m_C)/(m_A + m_B + m_C) = \frac{d_A m_B + (d_A + d_C)m_C}{m_A + m_B + m_C}\hat{e}_X$$

Ponieważ początek układu znajduje się w środku kuli o masie m_A, więc środek masy całego układu jest odległy o

$$R = \frac{d_A m_B + (d_A + d_C)m_C}{m_A + m_B + m_C}$$

od tej kuli.

Jeśli $m_A = 4$ kg, $m_B = 1$ kg, $m_C = 2$ kg, $d_A = 1$ m oraz $d_C = 2$ m, to

$$R = \frac{d_A m_B + (d_A + d_C)m_C}{m_A + m_B + m_C} = 1 \text{ m}$$

30 Zadanie - Wypadkowa sił

W pewnym punkcie przyłożono dwie prostopadłe do siebie siły, każda ma wartość $F = 4\,\mathrm{N}$. Dodatkowo na ten punkt działa siła o wartości $F = 5\,\mathrm{N}$ prostopadła do pozostałych sił. Oblicz wypadkową tych trzech sił.

31 Zadanie - Równowaga

Do środka masy ciała przyłożono dwie prostopadłe siły: $F_1 = 7\,\mathrm{N}$ i $F_2 = 3\,\mathrm{N}$. Jaką siłę należałoby przyłożyć do tego ciała, aby suma sił oraz momentów sił była równa zero? Oblicz wartość tej siły oraz na rysunku określ jej kierunek, zwrot oraz możliwe punkty zaczepienia.

Zastanów się, czy w omawianym przypadku wystarczy określenie 'momentów sił'*, czy powinno być np.* 'momentów sił względem środka masy'.

Wskazówki

Warto przedyskutować sytuacje, gdy suma sił jest równa 0, ale suma momentów nie.

Oraz konieczność określenia punktu, względem którego obliczamy moment siły, jeśli suma sił nie jest równa 0.

Jeśli suma sił jest równa 0, wypadkowy moment sił nie zależy od punktu, względem którego obliczamy momenty.

32 Zadanie - Wypadkowa sił II

Dwie siły tworzą kąt $\alpha = 120^\circ$. Każda siła ma jednakową wartość $10\,\mathrm{N}$. Oblicz wartość siły wypadkowej, a na rysunku określ jej kierunek i zwrot.

33 Zadanie - Suma sił

Na pewne ciało, które pozostaje w spoczynku, działają cztery siły: $\vec{F_i}$, gdzie $i = 1, 2, 3, 4$. Ile wynosi siła $\vec{F_4}$, jeśli wiadomo, że w pewnym układzie kartezjańskim pozostałe siły są równe:
$\vec{F_1} = [0, 5, 1]$ N; $\vec{F_2} = [-1, 2, -3]$ N; $\vec{F_3} = [11, -14, 2]$ N?

34 Zadanie - Studnia

Odległość uchwytu studziennej korby od osi walca, na który nawinięty jest łańcuch, jest równa $R = 40$ cm. Walec ma promień $r = 12$ cm. Jaką siłą (podaj zwrot i kierunek) należy działać na uchwyt korby, aby wiszące na końcu łańcucha wiadro o masie 10 kg nie poruszało się? Czy suma siły ciężkości wiadra i siły działającej na uchwyt korby musi być równa zero, aby wiadro wisiało nieruchomo?

35 Zadanie - L-bryła

Z czterech identycznych, jednorodnych sześcianów zbudowano bryłę w kształcie litery L. Wyznacz położenie środka ciężkości takiej bryły.

36 Zadanie - Dwie kule

Środki dwóch jednorodnych kul o promieniach r i R, wykonanych z tego samego materiału, znajdują się w odległości d od siebie. Oblicz odległość środka masy tego układu od środka kuli o promieniu R.

37 Zadanie - Kula z wydrążeniem

W ołowianej kuli o promieniu $a = 20$ cm znajduje się kuliste wydrążenie o promieniu $b = 3$ cm. Odległość między środkiem kuli a środkiem wydrążenia wynosi $d = 10$ cm. Znajdź położenie środka masy tej bryły.

Rozwiązanie

Zauważamy, że środek masy całkowicie wypełnionej kuli pokrywa się z jej środkiem geometrycznym. Możemy wobec tego napisać:

$$\vec{R}_K = (\vec{R}_{KzW} M + \vec{R}_W m)/(M + m),$$

gdzie $\vec{R}_K$ jest środkiem masy pełnej kuli o masie $M + m$;
$\vec{R}_{KzW}$ szukanym położeniem środka masy wydrążonej kuli o masie M;
$\vec{R}_W$ środkiem masy „wyjętej” kuli o promieniu b i masie m.

Umieszczam punkt 0 osi X w geometrycznym środku kuli o promieniu a. Niech oś X przechodzi przez geometryczny środek wydrążenia. Wobec tego: $\vec{R}_K = 0$ oraz $\vec{R}_W = d\hat{e}_X$. Otrzymane wcześniej równanie przybiera w tym układzie postać:

$$0 = (\vec{R}_{KzW} M + d\hat{e}_X m)/(M + m)$$

Wobec tego:

$$\vec{R}_{KzW} = -d\frac{m}{M}\hat{e}_X$$

Stosunek mas jest równy stosunkowi objętości: $m/M = b^3/(a^3 - b^3)$. A więc środek masy znajduje się w odległości

$$db^3/(a^3 - b^3) \approx 0.3 \text{ mm}$$

od geometrycznego środka kuli o promieniu a i po przeciwnej jego stronie niż środek wydrążenia.

38 Zadanie - Trójkąt z drutu

Z pętli wykonanej z jednorodnego, cienkiego drutu uformowano trójkąt prostokątny (drut leży tylko wzdłuż boków trójkąta). Jego wierzchołki mają w wybranym układzie kartezjańskim współrzędne: $(0,\ 0)$; $(a,\ 0)$ oraz $(0,\ b)$.
a) Wyznacz położenie środka masy tej figury (podaj współrzędne). Sprawdź poprawność wyniku w przypadku $b = 0$. Jaka figura powstaje w tym przypadku?
b) Uzyskaj również wyniki liczbowe w przypadku, gdy $a = 3$ cm oraz $b = 4$ cm.

39 Zadanie - Trójkąt z płyty

Wierzchołki wyciętego z jednorodnej płyty trójkąta mają w pewnym układzie kartezjańskim współrzędne: $(0,\ 0)$; $(x_2,\ 0)$ oraz $(0,\ y_3)$. Wyznacz równania środkowych oraz położenie środka masy tej figury.

Rozwiązanie

Środkowa A przechodząca przez wierzchołek $(0,\ 0)$ przechodzi przez środek odcinka między punktami $(x_2,\ 0)$ oraz $(0,\ y_3)$, czyli przez punkt

$$(\frac{x_2+0}{2},\ \frac{0+y_3}{2})$$

Wobec tego jej równanie ma postać

$$y_A = \frac{y_3}{x_2}x$$

Równanie środkowej przechodzącej przez wierzchołek $(x_2,\ 0)$:

$$y_B = -\frac{y_3}{2x_2}x + \frac{y_3}{2}$$

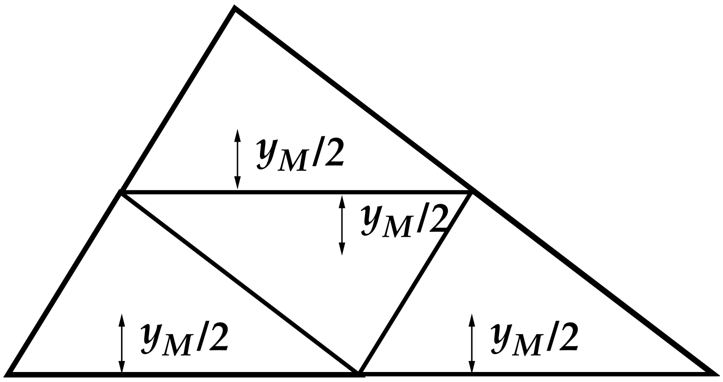
Równanie środkowej przechodzącej przez wierzchołek $(0,\ y_3)$:

$$y_C = -\frac{2y_3}{x_2}x + y_3$$

Środek masy znajduje się w punkcie przecięcia środkowych, co można łatwo pokazać, dzieląc trójkąt na paski równoległe do jednego z boków (każdy pasek ma środek masy w połowie długości). Punkt ten ma współrzędne

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{1}{3}x_2 \\ y_M &= \frac{1}{3}y_3 \end{aligned}$$

Studentów można zachęcić do uzyskania wyniku dla dowolnego trójkąta. Proszę też zaprezentować piękną metodę wyznaczenia odległości środka masy od boku trójkąta poprzez podział trójkąta na np. 4 trójkąty podobne:



Odległość środka masy dużego trójkąta od podstawy:

$$y_M = \frac{2\frac{1}{2}y_M\frac{1}{4}m + (\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}y_M)\frac{1}{4}m + (\frac{1}{2}h + \frac{1}{2}y_M)\frac{1}{4}m}{4\frac{1}{4}m} \ ,$$

gdzie h jest wysokością dużego trójkąta. Wobec tego:

$$y_M = \frac{1}{3}h$$

40 Zadanie - Trapez z płyty

Wierzchołki wyciętego z jednorodnej płyty trapezu mają w pewnym układzie kartezjańskim współrzędne: $(0,\ 0)$; $(x_2,\ 0)$; $(0,\ h)$ oraz $(x_4,\ h)$. Wyznacz położenie środka masy tej figury.

Wskazówki

Dzielimy trapez albo na dwa trójkąty, albo na trójkąt i prostokąt.

41 Zadanie - Równowaga sił na równi pochyłej

Na równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu $\alpha = 30°$ położono cegłę o masie $5\,\mathrm{kg}$. Narysuj siły ciężkości, tarcia. Siłę ciężkości rozłóż na dwie składowe siły: prostopadłą do równi siłę nacisku i równoległą do równi siłę zsuwającą. Oblicz wartości: siły nacisku i siły tarcia.
Uwaga: Pamiętaj, że w przypadku statycznym $T = \mu N$ jest wartością maksymalną siły tarcia statycznego (aktualna wartość może być mniejsza lub równa).

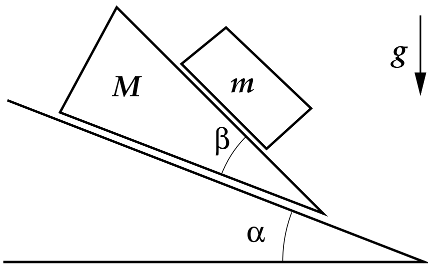
42 Zadanie - Moneta na kuli

Gdzie na nieruchomej ołowianej kuli o promieniu $R = 1$ m może leżeć moneta, której współczynnik tarcia statycznego o ołów wynosi $\mu = 0.7$?

43 Zadanie - Podwójna równia

Na równi pochyłej o kącie nachylenia α postawiono równię o masie M i kącie nachylenia β (Rys. 3). Na równię o masie M położono odważnik o masie m. Konstrukcja jest stabilna. Ile wynoszą współczynniki tarcia statycznego między poszczególnymi elementami? Uzyskaj również wyniki liczbowe dla $\alpha = 30°$ oraz $\beta = 15°$.

Rys. 3



Rozwiązanie

μ_a – współczynnik tarcia statycznego między równiami; μ_b – współczynnik tarcia statycznego między odważnikiem a równią.

Warunek spoczynku:
maksymalna wartość siły tarcia działająca na ciało >= niż siła zsuwająca (składowa siły ciężkości) leżącego fragmentu:

$$\mu_a(M+m)g\cos\alpha \geq (M+m)g\sin\alpha$$

I otrzymujemy:

$$\mu_a \geq \tan\alpha$$

Podobnie:

$$\mu_b \geq \tan(\alpha+\beta)$$

Dla $\alpha = 30^\circ$ oraz $\beta = 15^\circ$: $\mu_a \geq 1/\sqrt{3}$ oraz $\mu_b \geq 1$.

44 Zadanie - Równia pochyła

Na śliskiej równi pochyłej o kącie nachylenia do poziomu $\alpha = 30^\circ$ położono cegłę o masie $5\,\mathrm{kg}$. Oblicz przyśpieszenie cegły.

45 Zadanie – Zjazd po stoku

Sanki o masie 20 kg zjeżdżają po ośnieżonym stoku, który jest nachylony pod kątem 30° względem poziomu. Współczynnik tarcia ślizgowego sanek o śnieg jest równy $0{,}2$. Oblicz przyśpieszenie, z jakim poruszają się sanki. Przyjmij, że przyśpieszenie ziemskie jest równe $9{,}8$ m/s^2. Pomiń wpływ oporu powietrza.
Uwaga: Jeśli powierzchnie przemieszczają się względem siebie, występuje tarcie poślizgowe (kinetyczne) o wartości $T_k = \mu_k N$.

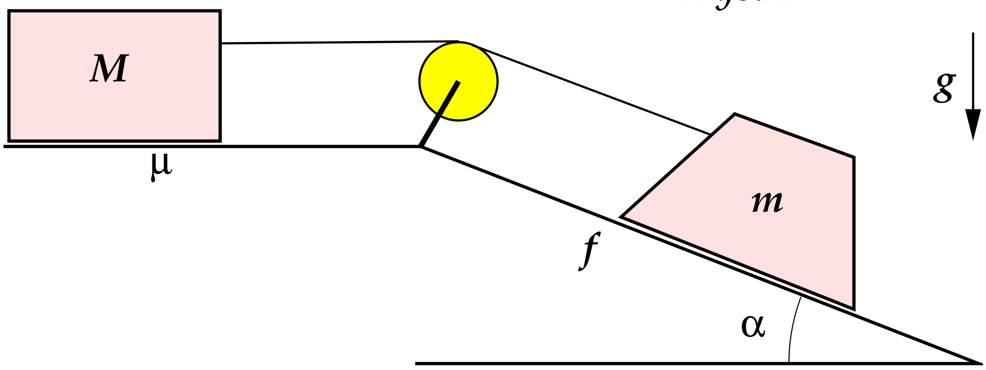
Rozwiązanie

Przyśpieszenie, z jakim poruszają się sanki, jest równe $3{,}2$ m/s^2.

46 Zadanie - Zjazd z asekuracją

Na poziomym stole znajduje się odważnik o masie M (Rys. 1). Współczynnik tarcia kinetycznego między odważnikiem a stołem wynosi μ. Na równi pochyłej o kącie nachylenia α znajduje się odważnik o masie m. Współczynnik tarcia kinetycznego między odważnikiem a równią wynosi f. Odważniki są połączone nieważką, nierozciągliwą linką, która opiera się o bloczek. Linka przesuwa się po bloczku bez poślizgu. Wiadomo, że odważnik na równi zsuwa się w dół równi, a linka jest zawsze równoległa do znajdującej się pod nią powierzchni. Przyśpieszenie ziemskie wynosi g.
Oblicz przyśpieszenie ciężarka o masie m.
Zaproponuj wartości liczbowe wielkości występujących w zadaniu i uzyskaj wynik liczbowy.

Rys. 1



47 Zadanie – Bateria „paluszek” contra piorun

Oblicz całkowity ładunek, który przepłynął podczas rozładowywania baterii (AA, 1,5 V) przez 5 dni ze średnim natężeniem 20 mA. Porównaj z ładunkiem przepływającym podczas wyładowania atmosferycznego o średnim natężeniu 10 kA, które trwało 1 ms.

Rozwiązanie

Natężenie prądu I jest ilością ładunku, jaki przepłynął w jednostce czasu przez pewną ustaloną powierzchnię (tutaj: powierzchnia przekroju poprzecznego przewodnika lub prostopadła powierzchnia do pioruna). Prąd średni obliczamy dzieląc całkowity ładunek Q, który przepłynął w czasie T:

$$I = Q/T$$

Wobec tego ładunek możemy obliczyć jako iloczyn średniego prądu i czasu:

$$Q = IT$$

W rozpatrywanych przypadkach otrzymuję:

$Q_{Bateria} = 20 \cdot 5$ mA dzień $= 20 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 24 \cdot 3600$ A s $= 10 \cdot 24 \cdot 36$ A s $= 8640$ C

$Q_{Piorun} = 10^4 \cdot 10^{-3}$ A s $= 10$ C

Odpowiedź: Ładunek, który przepłynął podczas rozładowywania baterii, wynosi 8640 C. Jest on prawie 900 razy większy od ładunku, który przepłynął podczas wyładowania atmosferycznego.

48 Zadanie - LEP

W akceleratorze LEP elektrony poruszały się po okręgu o obwodzie 27 km z prędkością bliską prędkości światła $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s. W jednej paczce było około $60 \cdot 10^{10}$ elektronów. W ramach wiązki elektronowej jednocześnie krążyły 4 paczki. Oblicz średni prąd wiązki elektronowej. Ładunek elektronu jest równy $1e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

49 Zadanie - Elektroliza

Przez roztwór soli srebra (^{108}Ag) przepuszczano prąd o natężeniu $I = 2$ A przez czas $T = 7$ h. Metalowe łyżki, zanurzone w roztworze, podłączono jako katodę. Łyżek było $n = 15$, a każda miała powierzchnię $S = 70$ cm^2. Gęstość srebra jest równa $\rho_S = 10490$ kg/m^3, a jego wartościowość 1 (Ag^{+1}). Ładunek elektronu jest równy $1e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; liczba Avogadro $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$/mol.
a) Oblicz grubość warstwy srebra na łyżeczkach.
b) Ile warstw atomowych ma powłoka?

50 Zadanie - Prędkość elektronów

Oszacuj średnią prędkość elektronów w miedzianym bezpieczniku o średnicy D przy maksymalnym dopuszczalnym prądzie $I_{\max}$. Gęstość i masa molowa miedzi wynoszą odpowiednio ρ =9 g/cm^3 oraz μ =63 g/mol; liczba Avogadro $N_A \approx 6 \cdot 10^{23}$/mol; ładunek elektronu $e \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}$C. Przyjmij jednorodny rozkład prądu. Załóż, że każdy atom miedzi oddaje jeden elektron do pasma przewodnictwa. Obliczenia przeprowadź dla trzech przypadków:

$I_{\max}$ [A]	1	10	100
D [mm]	0,042	0,25	1,2

Rozwiązanie

Ile nośników przepłynie w jednostce czasu przez przekrój drutu?

$$nS\bar{v} \ ,$$

gdzie $\bar{v}$ jest średnią prędkością ładunków wzdłuż drutu, n – gęstością ładunków-nośników (o wymiarze [liczba/objętość]), a $S = \pi D^2/4$ powierzchnią przekroju drutu.

Gęstość nośników: $n = N_A\rho/\mu$.

Natężenie prądu: $I = Q/t = en\bar{v}S$.

$\bar{v} = I/(enS) = \alpha I/D^2$, gdzie $\alpha = 4\mu/(e\rho N_A \pi) \approx 0.093$ mm^3/C.

$I_{\max}$ [A]	1	10	100
D [mm]	0.042	0.25	1.2
$\bar{v}$ [mm/s]	53	15	6.5

51 Zadanie - Datowanie geologiczne

W pewnej próbce granitu wykryto 7 mg argonu ^{40}Ar i 1 mg potasu ^{40}K. Zakładając, że argon powstał z rozpadu potasu i wiedząc, że czas połowicznego rozpadu potasu wynosi 1,25 mld lat, wyznacz wiek granitu. Ile jąder potasu rozpadło się w trakcie ostatniego okresu połowicznego rozpadu?
Oszacuj czas, po jakim w dowolnej próbce liczba jąder potasu ^{40}K zmniejszy się przynajmniej 1000 razy.

Uwaga: Zadanie rozwiąż bez używania funkcji $\exp()$ *i logarytmów.*

Wskazówki

Warto narysować 8 próbek potasu i je „rozpadać”.

$2^{10} = 1024$