Projekt Fizyka Plus nr POKL.04.01.02-00-034/11 współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki.

Kurs Plus - Fizyka - wersja dla nauczyciela
Materiały na kurs podstawowy, uzupełniający

Przygotowanie: Piotr Nieżurawski, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego
e-mail: *Piotr.Niezurawski@fuw.edu.pl*

Powinniśmy porzucić rozróżnienie pomiędzy myślą naukową a nienaukową.
Właściwe rozróżnienie polega na podziale na myśl logiczną i nielogiczną.
Clive Staples Lewis (1898–1963)

Zadania oznaczone gwiazdką są trudniejsze. W zadaniach, w których pojawia się moment bezwładności, można przyjmować, że dany obiekt jest nieważki.

1 Polowanie na asteroidę 3D

W przestrzeni kosmicznej porusza się bryła skalna. W pewnym układzie kartezjańskim jej położenie zależy od czasu następująco

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_x t + x_0 \\ v_y t \\ v_z t \end{pmatrix}$$

Jaki jest tor bryły skalnej?
Jakie warunki musimy spełnić, ustawiając działo, którym powinniśmy rozbić bryłę skalną, jeśli: wylot działa znajduje się w początku układu współrzędnych, musimy strzelać w chwili $t = 0$, a prędkość pocisku wynosi u?
Jeśli $v_x = -3$ m/s, $x_0 = 200$ m, $v_y = v_z = 6$ m/s oraz $u = 11$ m/s, znajdź wektor (wektory?) prędkości pocisku, który uderzy w bryłę.
Podaj przykład sytuacji, w której trafienie pociskiem w bryłę nie jest możliwe.

Rozwiązanie

Równanie ruchu pocisku:

$$\vec{r}_P(t) = \begin{pmatrix} u_x t \\ u_y t \\ u_z t \end{pmatrix}$$

Warunek spotkania się bryły i pocisku:

$$\vec{r}_P(t_S) = \vec{r}(t_S)$$

Rozpisany na składowe:

$$\begin{aligned} u_x t_S &= v_x t_S + x_0 \\ u_y t_S &= v_y t_S \\ u_z t_S &= v_z t_S \end{aligned}$$

Trzy warunki spotkania:

$$\begin{aligned} t_S &\geq 0 \quad \text{gdzie} \quad t_S = x_0/(u_x - v_x) \\ u_y &= v_y \\ u_z &= v_z \end{aligned}$$

Dodatkowy, czwarty warunek:

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$$

razem z drugim i trzecim prowadzą do wyniku:

$$u_x = \pm\sqrt{u^2 - v_y^2 - v_z^2}$$

który należy uwzględnić w pierwszym warunku.

Jeśli $v_x = -3$ m/s, $x_0 = 200$ m, $v_y = v_z = 6$ m/s oraz $u = 11$ m/s, to:

$$\begin{aligned} u_x &= \pm 7 \text{ m/s} \\ t_{S,+} &= 20 \text{ s} \\ t_{S,-} &= -50 \text{ s} \end{aligned}$$

Może nastąpić więc tylko jedno zderzenie, jeśli wektor prędkości pocisku jest równy:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ m/s}$$

Trafienie nie jest możliwe, gdy np. $u^2 - v_y^2 - v_z^2 < 0$. Jaka jest interpretacja fizyczna tego warunku?

2 Wioślarz

Wioślarz płynie łodzią w górę rzeki. Gdy przepływał pod mostem, z jego łodzi wypadło koło ratunkowe. Po czasie $t = 15$ min wioślarz zauważył zgubę. Natychmiast zaczął płynąć w dół rzeki i dopędził zgubione koło w odległości $s = 1$ km od mostu. Obliczyć prędkość prądu rzeki, jeżeli wioślarz cały czas wiosłował z jednakowym wysiłkiem.

Proszę na początku rozwiązać zadanie w myślach, bez wypisywania wzorów.

Rozwiązanie

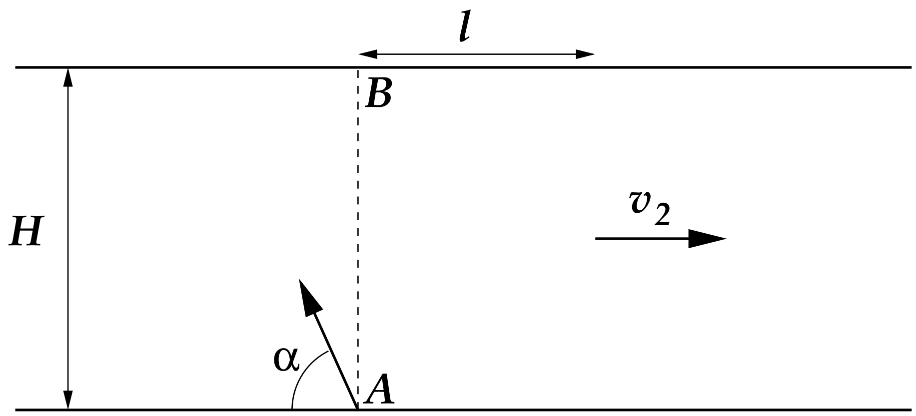
Względem wody szybkość wioślarza jest stała, więc płynął przez czas $2t = 30$ min. Prędkość nurtu

$$u = \frac{s}{2t} = 2 \text{ km/h}$$

3 Łódka (ukośnie względem brzegu)

Przewoźnik, który przeprawia się przez rzekę o szerokości H z punktu A, przez cały czas kieruje łódź pod kątem α względem brzegu rzeki (czyli między brzegiem a prostą przechodzącą przez dziób i środek rufy jest kąt α; Rys. 3). Wyznacz prędkość łódki względem wody $\vec{v}_1$, jeśli prędkość wody względem brzegu wynosi $\vec{v}_2$ (równoległa do brzegu), a łódkę zniosło na odległość l poniżej punktu B.

Rys. 3



Rozwiązanie

Prędkość łódki względem brzegu: $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

W wybranym układzie współrzędnych:

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= v_1[-\cos\alpha,\, \sin\alpha] \\ \vec{v}_2 &= v_2[1,\, 0] \end{aligned}$$

A więc: $\vec{v} = [v_2 - v_1\cos\alpha,\, v_1\sin\alpha]$

Przy warunku początkowym $\vec{r}(t=0) = [0,\, 0]$ równanie ruchu łódki:

$$\begin{aligned} x &= v_X t = (v_2 - v_1\cos\alpha)t \\ y &= v_Y t = v_1 \sin\alpha t \end{aligned}$$

Łódka przepływa rzekę w czasie T, $y(t=T) = H$, i znajduje się o l poniżej punktu B, $x(t=T) = l$. Eliminując T z tych dwóch równań, otrzymujemy wartość prędkości łódki:

$$v_1 = v_2/(l\sin\alpha/H + \cos\alpha)$$

4 Tarcza antyrakietowa

W chwili, gdy nad stanowiskiem artyleryjskim przelatuje rakieta, kanonier strzela z armatki. Prędkość początkowa pocisku wynosi v_P. Pod jakim kątem do poziomu powinna być ustawiona armata, aby strącić rakietę, jeśli leci ona cały czas z poziomą prędkością v_R? Na jakiej wysokości powinna lecieć rakieta, aby przy opisanym postępowaniu kanoniera uniknęła ona zestrzelenia? Zaniedbaj wysokość armatki oraz opory ruchu. Uzyskaj również wyniki liczbowe w przypadku, gdy $v_R = 500$ m/s oraz $v_P = 1$ km/s. Przyjmij przyśpieszenie ziemskie $g = 10$ m/s^2.

Rozwiązanie

Równanie ruchu rakiety w wybranym układzie współrzędnych:
$x_R = v_R t$
$y_R = H$
Równanie ruchu pocisku:
$x_P = v_P \cos\alpha t$
$y_P = v_P \sin\alpha t - \frac{1}{2} g t^2$
Warunek zestrzelenia: $x_R = x_P$ oraz $y_R = y_P$.
Z pierwszego równania otrzymujemy warunek na kąt:

$$\cos\alpha = v_R / v_P$$

Drugie równanie może być spełnione tylko wtedy, gdy:

$$\frac{1}{2} \frac{(v_P \sin\alpha)^2}{g} \geq H$$

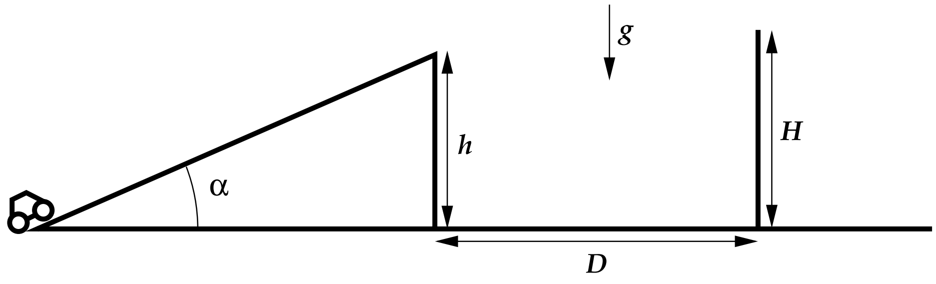
A więc rakieta uniknie zestrzelenia, jeśli będzie lecieć na wysokości większej niż $H_{\min}$:

$$H_{\min} = \frac{1}{2} \frac{(v_P \sin\alpha)^2}{g} = \frac{1}{2g}(v_P^2 - v_R^2)$$

W przypadku, gdy $v_R = 500$ m/s oraz $v_P = 1$ km/s:
$\cos\alpha = v_R / v_P = 1/2$, a więc $\alpha = 60°$,
$H_{\min} = (v_P^2 - v_R^2)/(2g) = 37.5$ km.

5 Kaskaderski skok

Samochód rusza z początku równi ze stałym przyśpieszeniem. Kąt nachylenia równi do poziomu wynosi α, a jej wysokość h. W odległości D od końca równi ustawiona jest bariera o wysokości H. Załóż, że po opuszczeniu równi na samochód działa tylko siła pochodząca od stałego, jednorodnego pola grawitacyjnego. Oblicz minimalne przyśpieszenie samochodu, z jakim powinien poruszać się w górę równi, aby przelecieć nad barierą. Uzyskaj również wynik liczbowy w przypadku, gdy $\alpha = 45°$, $h = 5$ m, $D = 10$ m, $H = 3$ m.



Rozwiązanie

Początek układu współrzędnych umieszczam na 'progu' równi, gdzie samochód rozpocznie lot. Równanie ruchu samochodu:

$x(t) = v_0 \cos \alpha t$
$y(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$
Chwila, w której samochód będzie mieć współrzędną $x = D$:
$t_B = D/(v_0 \cos \alpha)$
Do przelotu tuż nad barierą samochód będzie potrzebował najmniejszej prędkości w chwili opuszczania równi, a więc również najmniejszego przyśpieszenia na równi. Warunek na najmniejszą prędkość na progu:
$y(t_B) = H - h$
Stąd prędkość:

$$v_0 = \frac{D}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(D \tan \alpha + h - H)}}$$

Przy okazji otrzymujemy warunek konieczny realizacji kaskaderskiego przedsięwzięcia:
$H - h < D \tan \alpha$
Na równi samochód osiąga prędkość v_0, przebywając z przyśpieszeniem a drogę L w czasie T:
$h/L = \sin \alpha$
$L = \frac{1}{2} a T$
$v_0 = aT$
Stąd poszukiwane przyśpieszenie:

$$a = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{h/\sin \alpha} = g \frac{D^2 \sin \alpha}{4h \cos^2 \alpha (D \tan \alpha + h - H)}$$

W przypadku, gdy $\alpha = 45°$, $h = 5$ m, $D = 10$ m, $H = 3$ m:

$$a = g \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

6 Oscylator tłumiony *

Oblicz prędkość i przyśpieszenie ciężarka, którego położenie na osi X jest opisane równaniem

$$x(t) = A\, e^{-\lambda t} \, \sin(\omega t + \phi) \, ,$$

gdzie A, λ, ω, ϕ są pewnymi stałymi. Wyraź przyśpieszenie jako funkcję prędkości i położenia.

7 Zakręcona ćma (wersja light)

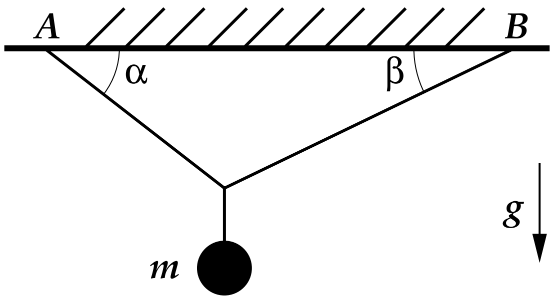
Ćma leci do źródła światła. Wektor prędkości ćmy jest nachylony pod stałym kątem $\alpha_0 = 60°$ względem odcinka ćma–źródło. Tor zawarty jest w płaszczyźnie (tzw. ruch płaski). Owad startuje z odległości $\rho_0 = 6$ m od źródła światła. Szybkość ćmy jest stała i równa $v_0 = 3$ m/s. Oblicz czas lotu ćmy do źródła światła. Naszkicuj tor, po jakim porusza się owad. Oblicz długość toru.

8 Podwieszenie Y

Kulka o masie m została zawieszona za pomocą nieważkich, nierozciągliwych linek. Wyznacz siły – graficznie i algebraicznie – jakimi linki działają na sufit w punktach A i B w sytuacji przedstawionej na Rysunku 1. Kąty α i β oraz przyśpieszenie ziemskie g są dane.

Po uzyskaniu odpowiedzi zastanów się, czy naprężoną linę rzeczywiście można rozerwać za pomocą niewielkiej, poprzecznej siły.

Rys. 1

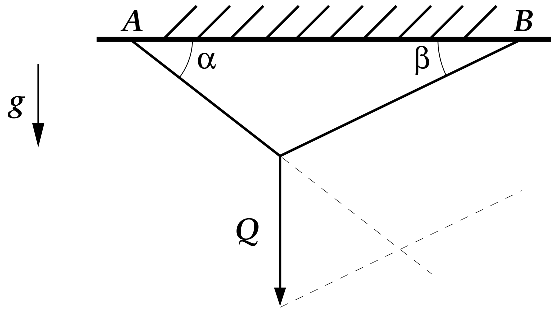


Rozwiązanie

Graficznie

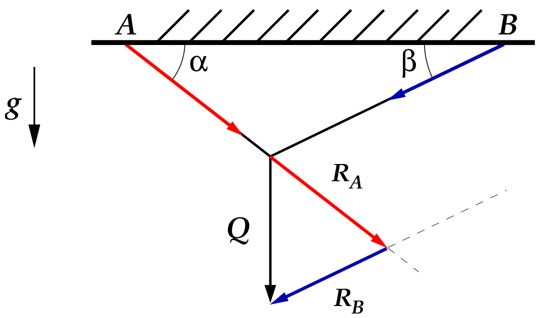
Musimy rozłożyć siłę ciężkości kulki na dwa wektory o kierunkach zgodnych z fragmentami linki. Przedłużamy linkę od punktu A; rysujemy równoległą prostą do linki z punktu B tak, żeby przechodziła przez koniec wektora $\vec{Q}$ – siły ciężkości kulki:

Rys. 1.1



Siły reakcji, jakimi linka działa na sufit, składają się na $\vec{Q}$ (wzdłuż odpowiednich prostych działania, tożsamych z kierunkami linek):

Rys. 1.2



Algebraicznie

W wybranym układzie współrzędnych siły, jakimi linki działają na sufit: $\vec{R}_A = R_A[\cos\alpha, -\sin\alpha]$ i $\vec{R}_B = R_B[-\cos\beta, -\sin\beta]$. A więc siły, jakimi sufit działa na linki to: $-\vec{R}_A$ oraz $-\vec{R}_B$. Na linki działa też siłą $\vec{Q} = [0, -mg]$ kulka. Ponieważ linki się nie poruszają oraz są nieważkie, więc (I zasada dynamiki):

$$(-\vec{R}_A) + (-\vec{R}_B) + \vec{Q} = 0$$

Uwaga: Wystarczy to, że linki są nieważkie, ale na razie nie możemy skorzystać jeszcze z II zasady dynamiki.

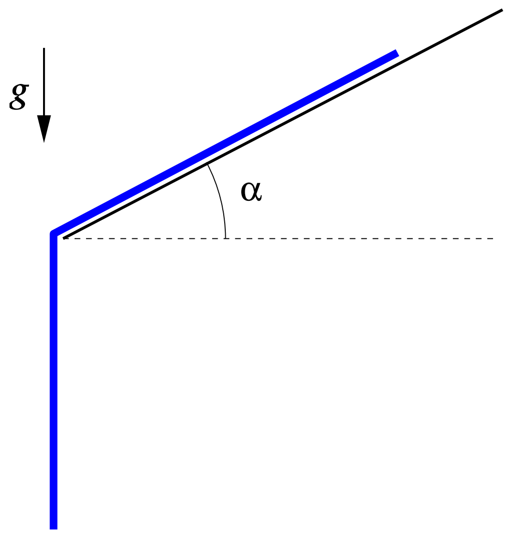
Rozwiązując układ dwóch równań, uzyskujemy odpowiedź:

$$\begin{aligned} R_A &= mg/(\sin\alpha + \cos\alpha\tan\beta) \\ R_B &= mg/(\sin\beta + \cos\beta\tan\alpha) \end{aligned}$$

Naprężoną linę rzeczywiście można by rozerwać za pomocą niewielkiej, poprzecznej siły (np. siła reakcji R_A staje się nieskończona przy α i β równych 0), ale nie ma lin nierozciągliwych (przy wydłużaniu się liny, kąty rosną).

9 Lina i pochyły stół

Połowa elastycznej liny zwisa ze stołu, którego blat jest nachylony pod kątem α względem poziomu. Lina pozostaje w spoczynku. Co można powiedzieć o współczynniku tarcia statycznego liny o stół? Tuż przy brzegu blatu tarcie nie występuje (tam, gdzie zagina się lina).



Uwaga: Pamiętaj, że w przypadku statycznym $T = \mu N$ jest wartością maksymalną siły tarcia statycznego (aktualna wartość może być mniejsza lub równa).

Rozwiązanie

Warunek spoczynku:
maksymalna wartość siły tarcia działająca na leżący fragment liny jest >= niż siła ciężkości zwisającego fragmentu oraz siła zsuwająca (składowa siły ciężkości nie równoważona przez reakcję) leżącego fragmentu:

$$\mu\frac{1}{2}mg\cos\alpha \geq \frac{1}{2}mg + \frac{1}{2}mg\sin\alpha$$

Skąd otrzymuję odpowiedź:

$$\mu \geq \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

10 Ciekawy skutek braku masy

Udowodnij następujące twierdzenie.

Wypadkowa siła działająca na nieważkie ciało jest zawsze równa 0.

Jest ono bardzo przydatne zagadnieniach, w których występują nieważkie liny, pręty, bloczki itd.

Rozwiązanie

Korzystamy z II zasady dynamiki:

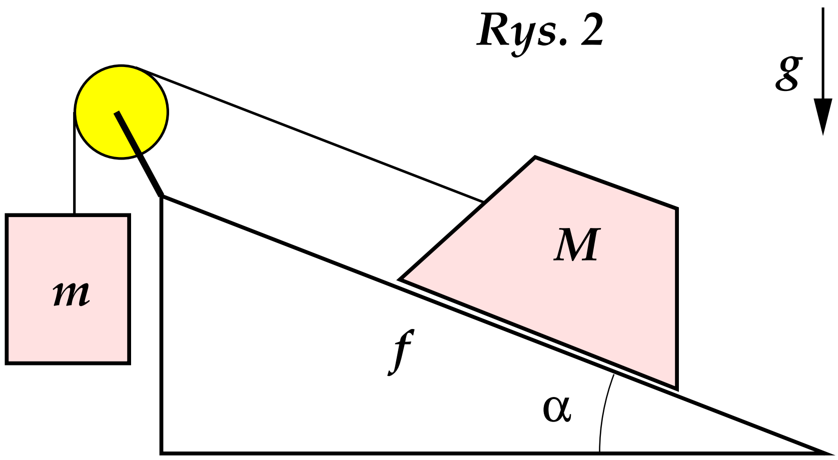
$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Jeśli $m = 0$, to oczywiście $F = 0$. Warto o tym pamiętać, gdyż często spotykam błędne uzasadnienia faktu, że np. siły działające na nieważką linkę z obu stron mają taką samą wartość.

11 Wjazd

Na równi pochyłej o kącie nachylenia α znajduje się odważnik o masie M (Rys. 2), który zawsze dotyka całą powierzchnią swojej podstawy równi. Współczynnik tarcia kinetycznego między odważnikiem a równią wynosi f. Odważnik jest połączony nieważką, nierozciągliwą linką z odważnikiem o masie m, który wisi poza krawędzią równi. Linka przesuwa się bez tarcia po bloczku. Wiadomo, że fragment linki między odważnikiem o masie M i bloczkiem jest zawsze równoległy do stoku równi, a przedłużenie tego fragmentu linki zawsze przechodzi przez środek masy odważnika o masie M. Przyśpieszenie ziemskie wynosi g.
a) Jaki warunek musi spełniać współczynnik tarcia statycznego f_S, aby odważniki spoczywały, jeśli nie nadano im prędkości początkowych?
b) Oblicz wartość przyśpieszenia odważnika o masie m, jeśli wiadomo, że odważniki zaczęły się poruszać i odważnik o masie m opada.
Zaproponuj wartości liczbowe wielkości występujących w zadaniu i uzyskaj wyniki liczbowe.

Rys. 2



Wskazówki

W podpunkcie (a) należy rozpatrzyć dwie możliwości: siła tarcia statycznego może powstrzymywać ciało przed zjeżdżaniem lub wjeżdżaniem po stoku.

12 W kulki

Dwie identyczne kulki, każda o masie $m = 20$ g odbijają się idealnie sprężyście od nieruchomej ściany, której powierzchnia w wybranym, prawoskrętnym układzie współrzędnych kartezjańskich jest opisana równaniem $x = 0$. Prędkości kulek przed odbiciem są równe

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= [2;\ 3;\ 5]\ \text{m/s}\\ \vec{v}_2 &= [5;\ -2;\ -1]\ \text{m/s}\end{aligned}$$

a) Określ prędkości kulek po odbiciu (gdzie muszą znajdować się początkowo kulki, by zaszło odbicie?).
b) Wyznacz wektor zmiany pędu każdej z kulek.
c) Oblicz średnią siłę, jaką działają kulki na ścianę, jeśli takie zdarzenie powtarza się co 2 s.
d) Oblicz energię kinetyczną kulek.
e) Oblicz kąt między prędkościami kulek przed zderzeniem i po nim.

13 Spadochroniarz

Spadochroniarz o masie 75 kg opada na spadochronie pionowo w dół ze stałą prędkością o wartości 4 m/s. Oblicz siłę oporów ruchu działającą na spadochroniarza wraz ze spadochronem. Z której zasady dynamiki skorzystałeś?

14 Statek kosmiczny

Statek kosmiczny spoczywał, a następnie rozpadł się na dwie części: jedna część o masie 5000 kg porusza się z prędkością 20 m/s. Oblicz masę drugiego fragmentu statku, jeśli jego prędkość jest równa 4 m/s.

15 Rozstanie

Z dala od innych ciał spoczywa układ dwóch odważników o masach m_1 i m_2 ściskających nieważką sprężynę, której współczynnik sprężystości wynosi k, a długość swobodna równa jest L. Nieruchome odważniki znajdują się w odległości l od siebie. Oblicz prędkości odważników po chwili, gdy sprężyna przestanie na nie oddziaływać. Uzyskaj również wyniki liczbowe w przypadku, gdy $m_1 = 20$ kg, $m_2 = 10$ kg, $k = 500$ N/m, $L = 50$ cm, $l = 30$ cm. Zaniedbaj oddziaływanie grawitacyjne między odważnikami.

Rozwiązanie

Energia początkowa układu:
$E_i = E_s$,
gdzie energia potencjalna sprężyny: $E_s = \frac{1}{2}k(l - L)^2$.
Energia końcowa układu:
$E_f = E_k$,
gdzie energia kinetyczna odważników: $E_k = \frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2)$
Z zasady zachowania energii, $E_f = E_i$, otrzymujemy:

$$\frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) = \frac{1}{2}k(l - L)^2$$

***Dygresja*.**
Zaniedbaliśmy zmianę energii potencjalnej układu wynikającą z oddziaływania grawitacyjnego. Poprawne równania wyglądają następująco:
$E_i = \frac{1}{2}k(l-L)^2 - Gm_1m_2/l$
$E_f = \frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2) - Gm_1m_2/r,$
gdzie r jest odległością między odważnikami. Uzyskujemy teraz równanie:

$$\frac{1}{2}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2) = \frac{1}{2}k(l-L)^2 - Gm_1m_2(\frac{1}{l} - \frac{1}{r})$$

Czy możemy zaniedbać oddziaływanie grawitacyjne? Stała grawitacji wynosi $G \approx 6.7 \cdot 10^{-11}$ *m*^{3}*kg*$^{-1}$*s*$^{-2}$*.*
Dla podanych w zadaniu wartości energia potencjalna sprężyny wynosi:
$\frac{1}{2}k(l-L)^2 = 10$ *J*
Natomiast zmiana energii potencjalnej - a w naszym przypadku poprawka do uzyskanego równania - wynosi:
$Gm_1m_2(1/l - 1/r) \approx 1.8 \cdot 10^{-8}$ *J* *dla* $r = L$
$Gm_1m_2(1/l - 1/r) \approx 4.5 \cdot 10^{-8}$ *J* *dla* $r \to +\infty$
A więc w rozważanym problemie poprawka związana z oddziaływaniem grawitacyjnym jest zaniedbywalna.
Koniec dygresji.

Kolejne równanie wynika z zasady zachowania pędu.
Pęd odważnika o masie m_i i prędkości $\vec{v}_i$ wynosi: $\vec{p}_i = \vec{v}_i m_i$.
Pęd początkowy układu, ze względu na zerowe prędkości ciężarków: $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$.
Pęd końcowy układu: $\vec{P}' = \vec{p}_1\,' + \vec{p}_2\,' = \vec{v}_1 m_1 + \vec{v}_2 m_2$.
Zasada zachowania pędu: $\vec{P}' = \vec{P}$
A więc:
$\vec{v}_1 m_1 + \vec{v}_2 m_2 = 0$
Wektory muszą mieć ten sam kierunek, aby równanie mogło być spełnione.
Zakładając postać wektorów: $\vec{v}_1 = v_1\hat{e}_x$ oraz $\vec{v}_2 = -v_2\hat{e}_x$, uzyskujemy równanie:

$$m_1v_1 = m_2v_2$$

Wyznaczamy z tego równania v_2 i podstawiamy do równania wynikającego z zasady zachowania energii, otrzymując wynik:

$$v_1 = |l-L|\sqrt{\frac{k}{m_1(1+m_1/m_2)}}$$

Prędkość drugiego odważnika: $v_2 = v_1m_1/m_2$.
W przypadku, gdy $m_1 = 20$ kg, $m_2 = 10$ kg, $k = 500$ N/m, $L = 50$ cm, $l = 30$ cm:
$v_1 \approx 0.58$ m/s
$v_2 = 2v_1 \approx 1.15$ m/s

16 Zderzenie centralne *

Kula o masie m_1 i prędkości v_1 zderza się z kulą o masie m_2 i prędkości v_2. Zderzenie jest idealnie sprężyste, a środki geometryczne kul cały czas znajdują się na tej samej prostej. Kule nie wirują. Oblicz prędkość kuli o masie m_1 po zderzeniu. Wynik doprowadź do postaci, w której nie występuje pierwiastek kwadratowy. Sprawdź wynik w przypadku, gdy $m_1/m_2 \to 0$, oraz w przypadku, gdy $m_2/m_1 \to 0$.

Spróbuj rozwiązać układ równań sprytnie, bez standardowej procedury dla trójmianu kwadratowego.

17 Winda

Na zamocowanym do sufitu windy siłomierzu wisi odważnik. Gdy winda znajdowała się w spoczynku, siłomierz wskazywał 40 N. Gdy winda poruszała się, siłomierz wskazywał 44 N.

a) Jak nazywa się siła, która powoduje zmianę wskazań siłomierza?

b) Jakimi rodzajami ruchu i w którą stronę mogła poruszać się winda?

c) Oblicz wartość przyspieszenia windy. Przyjmij wartość przyspieszenia ziemskiego 10 m/s^2.

Rozwiązanie

a) Siła pozorna bezwładności występująca w układzie nieinercjalnym. Krótkie wyjaśnienie dla układów niewirujących:

$$
\begin{aligned}
\vec{a}_{w\,iner} m &= \vec{F}_{rzecz} \\
\vec{a}_{w\,iner} &= \vec{A}_{ukł\,niein} + \vec{a}_{w\,niein} \\
\vec{a}_{w\,niein} m &= \vec{F}_{rzecz} - \vec{A}_{ukł\,niein} m \\
\vec{F}_{poz} &= -\vec{A}_{ukł\,niein} m
\end{aligned}
$$

b) Dwie możliwości: ruch jednostajny przyśpieszony w górę lub ruch jednostajny opóźniony w dół.

c) $F_{poz} = 4$ N, $m = 4$ kg, $A_{ukł\,niein} = F_{poz}/m = 1$ m/s^2

18 Tramwaj

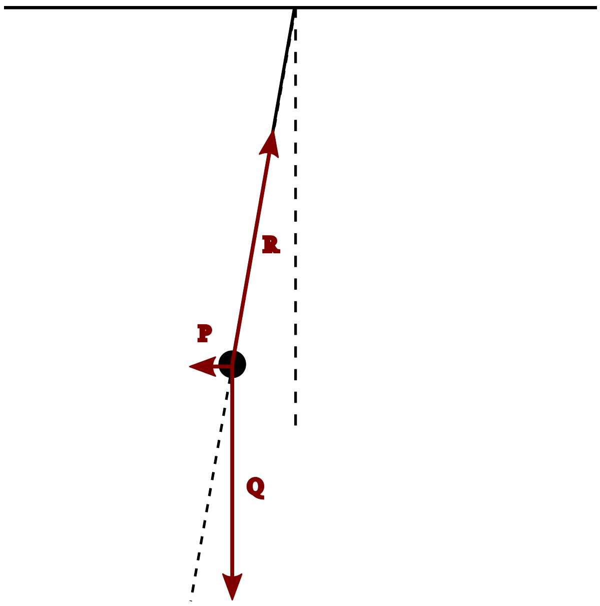
Podczas hamowania tramwaju uchwyt do trzymania się, zamocowany pod sufitem wagonu, odchylił się od pionu o kąt $10°$. Pojazd poruszał się po prostych, poziomych szynach ruchem jednostajnie opóźnionym. Przyjmij, że wartość przyspieszenia ziemskiego wynosi 10 m/s^2.

a) Narysuj, oznacz i nazwij wszystkie siły działające na swobodnie wiszący uchwyt podczas hamowania **w układzie odniesienia związanym z tramwajem**.

b) Oblicz wartość opóźnienia tramwaju podczas hamowania.

Rozwiązanie

a)



Q - siła ciężkości
R - siła reakcji linki lub siła napięcia linki
P - pozorna siła bezwładności

b)

Suma wektorów sił = 0, a więc musi być

$$\frac{P}{Q} = \tan\alpha$$

Wiadomo, że $Q = mg$, $P = ma$, gdzie a jest przyśpieszeniem/opóźnieniem tramwaju. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} a &= g\,\tan\alpha = 10\ \mathrm{m/s}^2 \cdot \tan 10^\circ \\ &= 10\ \mathrm{m/s}^2 \cdot 0.176 = 1.76\ \mathrm{m/s}^2 \end{aligned}$$

19 Trochę inne zadanie - ?B

Oszacuj ilość pamięci, jaką powinien dysponować każdy mieszkaniec planety Ziemia, aby można było zapisać tyle bajtów, ile jest atomów w próbce zawierającej jedynie ^{12}C i ważącej 12 g.

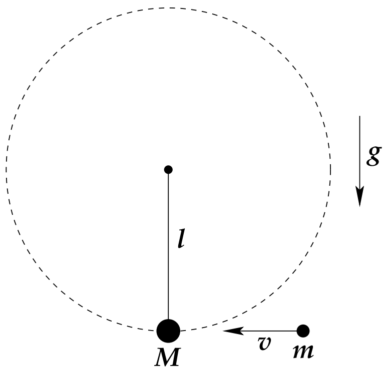
20 Postrzelone wahadło *

Metalowy ciężarek o masie $M = 1960$ g wisi na bardzo lekkim sznurku o długości $l = 50$ cm. Sznurek zaczepiony jest jednym końcem w środku ciężkości ciężarka, a drugim w taki sposób, że po nadaniu ciężarkowi prędkości o odpowiednio dużej wartości ciężarek może poruszać się po okręgu leżącym w płaszczyźnie pionowej.

W pewnej chwili w ciężarek uderza poziomo lecący z prędkością o wartości v pocisk o masie $m = 40$ g. Pocisk zlepia się trwale z ciężarkiem. Powstałą bryłę można traktować jak punkt materialny (w rozważaniach można pominąć rozmiary bryły).

Jaka powinna być minimalna wartość prędkości pocisku, aby utworzona bryła zatoczyła pełny okrąg o promieniu l w płaszczyźnie pionowej?

Przyjmij wartość przyśpieszenia ziemskiego $g = 9{,}8$ m/s^2.



Rozwiązanie

Z.z. pędu

$$\begin{aligned} vm &= V_b(M+m) \\ V_b &= vm/(M+m) \end{aligned}$$

W najwyższym punkcie przyśpieszenie grawitacyjne gra rolę przyśpieszenia dośrodkowego

$$a_d = g \quad = \quad V'^2/l$$

Z.z. energii

$$\frac{1}{2}V_b^2 = \frac{1}{2}V'^2 + 2lg$$

Stąd mamy v.

21 Ruchoma równia z zagadką

Równia pochyła o kącie nachylenia α oraz o masie M może przesuwać się bez tarcia po stole. Na równię położono ciężarek o masie m. Ciężarek zaczął zsuwać się bez tarcia po równi, a po przebyciu drogi L' wzdłuż stoku uzyskał prędkość v' w układzie związanym z równią. Ile wynosi w tym momencie prędkość równi względem stołu? Uzyskać również wynik liczbowy w przypadku, gdy $m = 1$ kg, $v' = 0.1$ m/s, $L' = 0.5$ mm, $M = 0.5$ kg, $\alpha = 30°$, $g = 10$ m/s^2. Która informacja jest zbędna?

Rozwiązanie

Układ nie jest izolowany, ale możemy skorzystać z zasady zachowania pędu dla składowej poziomej, względem której pole grawitacyjne jest prostopadłe (oś X wyznacza poziom). Pęd początkowy wynosi 0, więc:
$(m\vec{v} + M\vec{V}) \cdot \hat{e}_x = 0,$
gdzie $\vec{v}$ jest prędkością ciężarka w układzie związanym ze stołem, a $\vec{V}$ prędkością równi względem stołu. Prędkość ciężarka względem równi, $\vec{v}'$, spełnia:
$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}',$
a więc:

$(m\vec{v}' + (M+m)\vec{V}) \cdot \hat{e}_x = 0$
Jeśli przyjmiemy, że ciężarek przesuwa się na lewo, a równia porusza się w prawo, to:
$v'_x = -v' \cos\alpha$
$V_x = V$
Stąd:
$-v' \cos\alpha m + (M+m)V = 0$
A więc ostatecznie prędkość równi względem stołu wynosi:

$$V = v' \cos\alpha m/(M+m)$$

W przypadku, gdy $m = 1$ kg, $v' = 0.1$ m/s, $M = 0.5$ kg, $\alpha = 30°$:
$V = \sqrt{3}/30$ m/s ≈ 58 mm/s

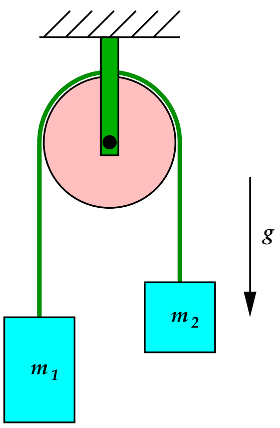
Zbędna jest informacja o L'.

22 Bloczek w dwóch odsłonach

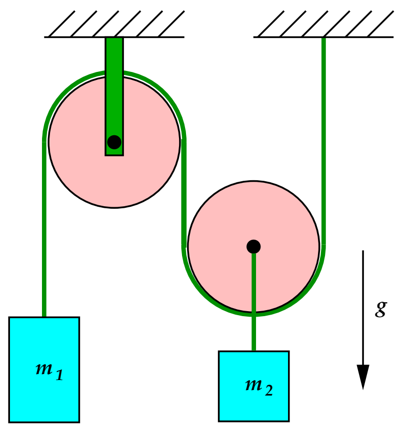
Dwa odważniki o masach m_1 oraz m_2 połączono nieważką, nierozciągliwą liną i przewieszono przez bloczek o promieniu R, który przymocowano do sufitu (układ przedstawiono na rysunku). Z jakim przyśpieszeniem będzie poruszać się odważnik o masie m_1, jeśli:
a) bloczek jest nieważki,
b) moment bezwładności bloczka względem jego osi obrotu wynosi I.
Układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym.

Rozwiązanie

Wybór osi x: $\vec{g} = g\hat{e}_x$. Równania ruchu wzdłuż osi x: $a_1 m_1 = m_1 g - T_1$ oraz $a_2 m_2 = m_2 g - T_2$.
a) W przypadku nieważkich liny i bloczka (zakładamy, że lina nie ślizga się po bloczku) można pokazać równość $T_1 = T_2$ przynajmniej na dwa sposoby:
1) Z równania na ruch liny: $M_{L+B\ eff} a_L = T_1 - T_2$.
2) Z równania na ruch bloczka: $I_{L+B\ eff} \varepsilon_B = R(T_1 - T_2)$, gdzie R jest promieniem bloczka.
Ponieważ lina i bloczek są nieważkie, więc $M_{L+B\ eff} = 0$ oraz $I_{L+B\ eff} = 0$, co prowadzi do wniosku $T_1 = T_2 = T$.
Wiąz na długość liny: $x_1 + \pi R + x_2 = L =$const. A więc: $a_1 = -a_2$.
Odpowiedź: $a_1 = g(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2)$.
b) Z równania dla bloczka $I\vec{\varepsilon} = \sum \vec{r} \times \vec{F}$ mamy: $I\varepsilon = R(T_1 - T_2)$. Położenie ciężarka 1 możemy powiązać z kątem obrotu bloczka: $x_1 = R\alpha$. Prowadzi to do: $a_1 = R\varepsilon$.
Odpowiedź: $a_1 = g(m_1 - m_2)/(m_1 + m_2 + I/R^2)$.



Rysunek do Zadania 22



Rysunek do Zadania 23

23 O tym, jak jeden może wciągnąć dwóch

Odważnik o masie m_1 przymocowano do nieważkiej, nierozciągliwej liny, którą przewieszono przez bloczek przyczepiony do sufitu. Na linę nawleczono następnie drugi bloczek z uwiązanym do jego osi odważnikiem o masie m_2. Koniec liny zaczepiono pod sufitem (układ przedstawiono na rysunku). Z jakim przyśpieszeniem będzie poruszać się odważnik o masie m_1, jeśli bloczki są nieważkie? Układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym.

Rozwiązanie

Wybór osi x: $\vec{g} = g\hat{e}_x$. Równania ruchu wzdłuż osi x: $a_1 m_1 = m_1 g - T$ oraz $a_2 m_2 = m_2 g - 2T$.
Wiąz na długość liny: $x_1 + \pi R + x_2 + \pi R + x_2 = L$ =const. A więc: $a_1 = -2a_2$.
Odpowiedź: $a_1 = g(m_1 - m_2/2)/(m_1 + m_2/4)$.

24 Małpa

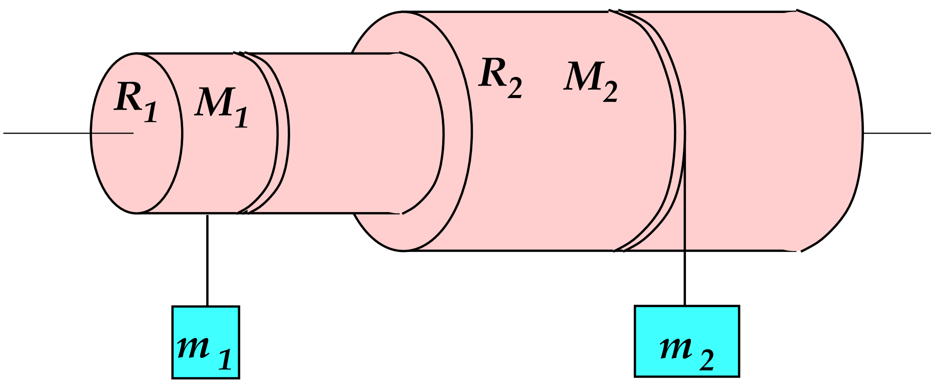
Odważnik o masie M przymocowano do nieważkiej, nierozciągliwej liny, którą przewieszono przez bloczek przyczepiony do sufitu. Za swobodny koniec liny chwyciła małpa o masie m i wspina się. Jakim ruchem względem liny przemieszcza się małpa, skoro jej odległość od sufitu się nie zmienia? Obliczyć parametry tego ruchu. Bloczek jest nieważki, a układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym.

Rozwiązanie

Wybór osi x: $\vec{g} = g\hat{e}_x$. Równania ruchu wzdłuż osi x: $AM = Mg - T$ oraz $am = mg - T$.
Wiąz na długość liny: $X + \pi R + x = L$, gdzie L jest długością liny miedzy odważnikiem a małpą. A więc przyśpieszenie małpy względem liny $a' \equiv \ddot{L} = A + a$.
Warunek zadania: $a = 0$, co oznacza, że: $a' \equiv \ddot{L} = A$
Odpowiedź: Ruch jednostajnie przyśpieszony z $a' = g(1 - m/M)$. Jeśli $m > M$, to rzeczywiście małpa się wspina.

25 Bloczek-dźwignia

Bloczek składający się z dwóch sztywno połączonych jednorodnych walców może obracać się dookoła własnej osi symetrii. Na walec o promieniu R_1 i masie M_1 nawinięto nierozciągliwy sznurek, do którego przymocowano ciężarek o masie m_1. W przeciwnym kierunku nawinięto na walec o promieniu R_2 i masie M_2 nierozciągliwy sznurek, do którego przymocowano ciężarek o masie m_2. Układ znajduje się w stałym jednorodnym polu grawitacyjnym. Obliczyć przyśpieszenie ciężarka o masie m_1.



Rozwiązanie

Równania dla ciężarków:

$m_1 a_1 = m_1 g - T_1$

$m_2 a_2 = m_2 g - T_2$

Równanie dla układu walców:

$I\varepsilon = T_1 R_1 - T_2 R_2,$

gdzie $I = M_1 R_1^2/2 + M_2 R_2^2/2$

Równania więzów:

$a_1 = R_1 \varepsilon$

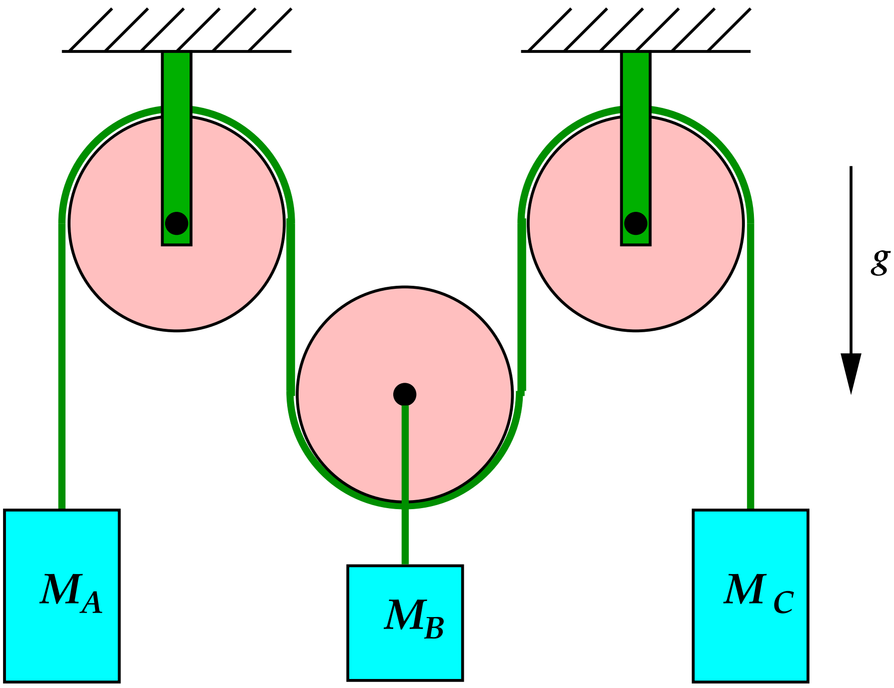
$a_2 = -R_2 \varepsilon$

Odpowiedź:

$a_1 = g R_1 (m_1 R_1 - m_2 R_2)/(I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)$

26 Bloczki trzy

Z jakim przyśpieszeniem będzie poruszać się odważnik o masie M_A w układzie przedstawionym na rysunku, jeśli masy wszystkich odważników – M_A, M_B oraz M_C – są znane? Bloczki są nieważkie, a nieważka, nierozciągliwa lina porusza się bez tarcia. Układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym.



Rozwiązanie

Wybór osi X: $\vec{g} = g\hat{e}_x$.
Równania ruchu wzdłuż osi x:

$$\begin{aligned} a_A M_A &= g M_A - T \\ a_B M_B &= g M_B - 2T \\ a_C M_C &= g M_C - T \end{aligned}$$

Wiąz na długość liny: $x_A + 2x_B + x_C =$const.
A więc:

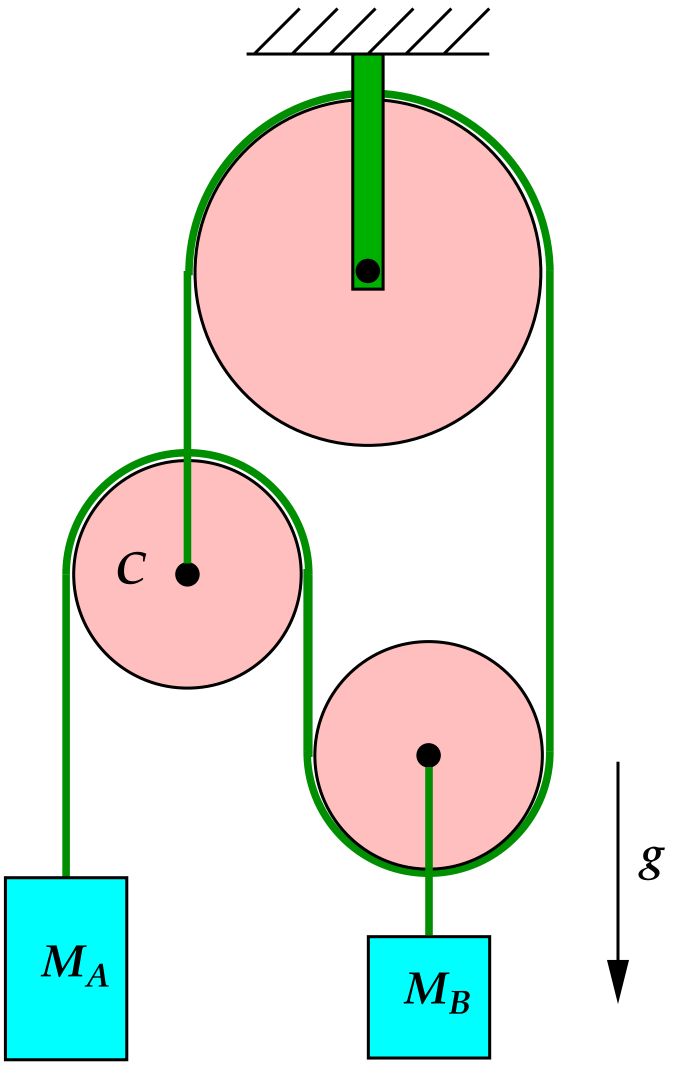
$$a_A + 2a_B + a_C = 0$$

Po rozwiązaniu otrzymanego układu 4 równań znajdujemy *odpowiedź*:

$$a_A = g(M_A M_B + 4M_A M_C - 3M_C M_B)/(M_A M_B + 4M_A M_C + M_C M_B)$$

27 Straszliwy wielokrążek *

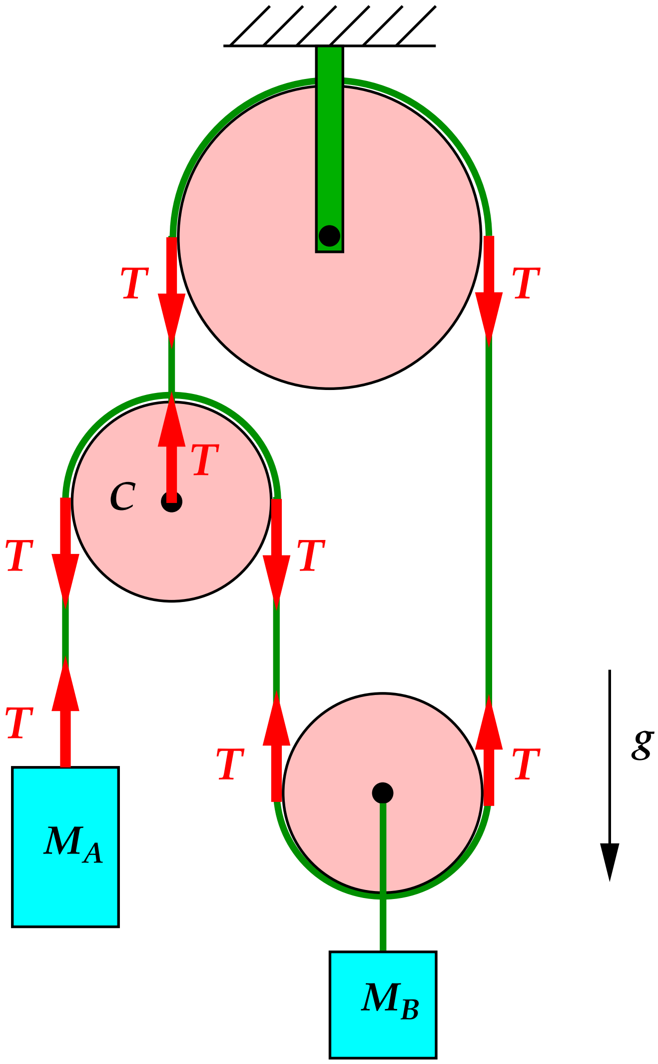
Z jakimi przyśpieszeniami będą poruszać się odważniki o masach M_A oraz M_B w układzie przedstawionym na rysunku? Wszystkie bloczki są nieważkie, a nieważka, nierozciągliwa lina porusza się bez tarcia. Układ znajduje się w jednorodnym polu grawitacyjnym.



Zadanie to wymyśliłem na kolokwium z Fizyki IBC na jesieni 2006 r. Spośród 155 piszących kolokwium 7 osób przedstawiło poprawne rozwiązanie. Zadanie zostało następnie wykorzystane w Olimpiadzie Fizycznej.

Rozwiązanie - Sposób 1

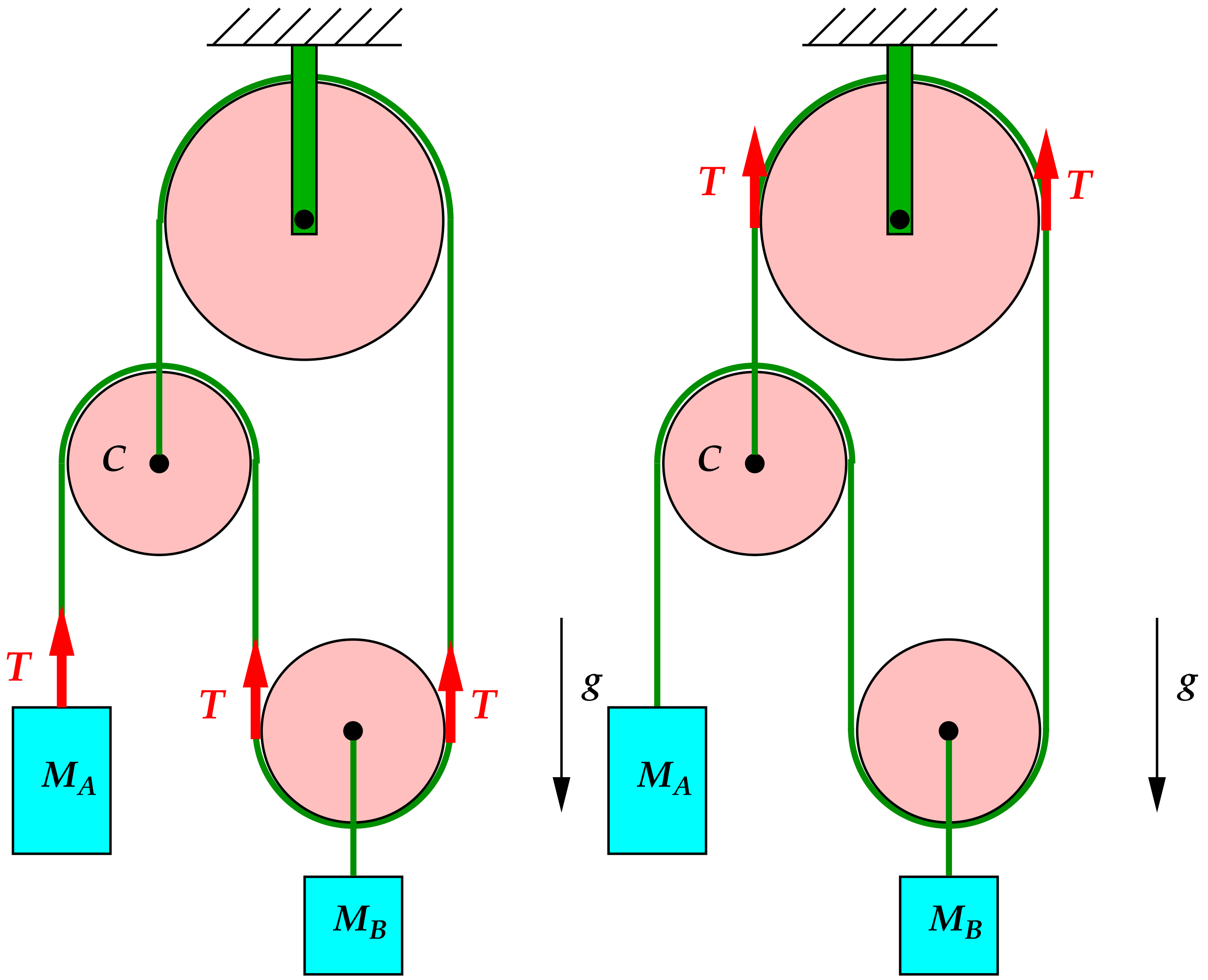
Lina jest nieważka (czyli jej masa wynosi 0) oraz może ślizgać się bez tarcia po bloczkach, więc zgodnie z II zasadą dynamiki suma sił działających wzdłuż liny na dowolny jej fragment wynosi 0. Wobec tego np. siły, jakimi lina działa na ciężarek o masie M_A oraz oś nieważkiego bloczka C, mają tę samą wartość (tutaj: *wartość* oznacza długość wektora), T. Na rysunku zaznaczono wektory sił, jakimi lina działa na bloczki oraz na ciężarek o masie M_A:



Z rysunku wynika, że na bloczek C działa wypadkowa siła o wartości T. Ze względu na to, że bloczek jest nieważki, korzystając z II zasady dynamiki, dochodzimy do wniosku (podobnie jak dla liny), że $T = 0$. Na ciężarki działa tylko siła grawitacji, więc każdy z nich porusza się w dół z przyśpieszeniem g.

Rozwiązanie - Sposób 2

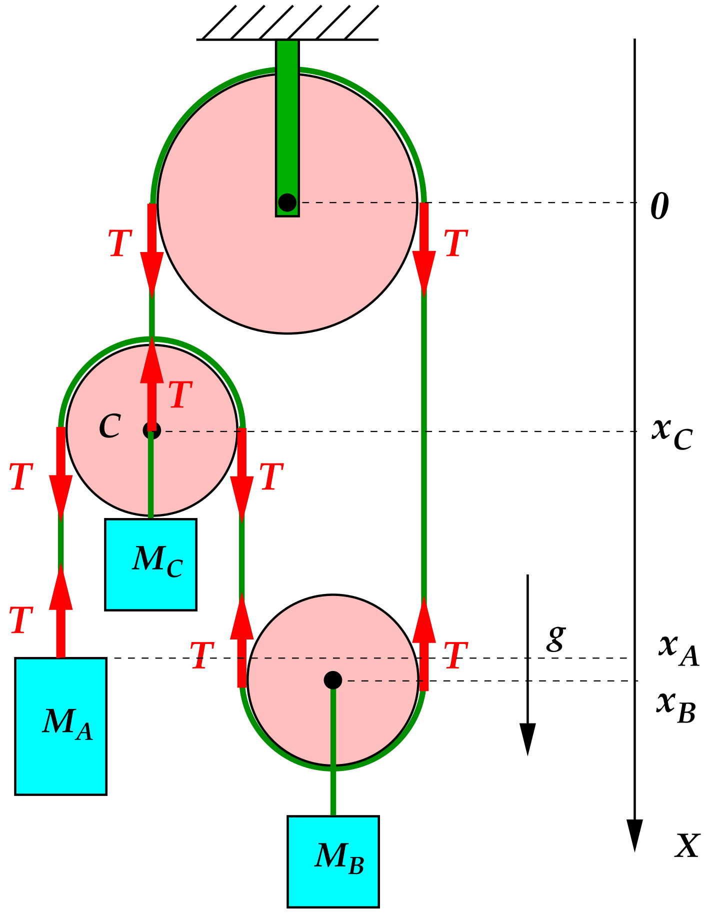
Korzystając z wniosku o równości siły naciągu liny na całej jej długości z paragrafu „Rozwiązanie - Sposób 1", rozważam całkowitą siłę działającą na oba odważniki. Można to zrobić na dwa sposoby:



Przy czym niezaznaczone siły grawitacyjne są oczywiście takie same w obu przypadkach. Ponieważ całkowita siła działająca na bloczki musi być taka sama w danym układzie odniesienia niezależnie od konfiguracji nieważkich obiektów, które pośredniczą w jej przekazywaniu, więc otrzymujemy warunek $3T = 2T$, który jest spełniony jedynie dla $T = 0$. Na ciężarki działa tylko siła grawitacji, więc każdy z nich porusza się w dół z przyśpieszeniem g.

Rozwiązanie - Sposób 3

Korzystam z wniosku o równości siły naciągu liny na całej jej długości z paragrafu „Rozwiązanie - Sposób 1". Zakładam, że do osi bloczka C doczepiono odważnik o masie M_C. Wybierając oś X jako zgodną z wektorem przyśpieszenia ziemskiego ($\vec{g} = g\hat{e}_x$) oraz jej początek (na przykład) tak jak na rysunku,



uzyskuję następujące równania ruchu dla odważników wzdłuż tej osi:

$$
\begin{aligned}
a_A M_A &= g M_A - T \\
a_B M_B &= g M_B - 2T \\
a_C M_C &= g M_C + 2T - T
\end{aligned}
$$

Wiąz na długość liny, która jest nierozciągliwa, $x_A - x_C + 2x_B =$ const., prowadzi do związku między przyśpieszeniami:

$$a_A - a_C + 2a_B = 0$$

Rozwiązując powyższy układ 4 równań, otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
T &= 2M_A M_B M_C / (4M_A M_C + M_B M_C + M_A M_B) \\
a_A &= g(4M_A M_C - M_B M_C + M_A M_B)/(4M_A M_C + M_B M_C + M_A M_B) \\
a_B &= g(M_B M_C + M_A M_B)/(4M_A M_C + M_B M_C + M_A M_B)
\end{aligned}
$$

Uwzględniając warunki zadania, czyli $M_C = 0$, uzyskujemy odpowiedź:

$$
\begin{aligned}
T &= 0 \\
a_A &= g \\
a_B &= g
\end{aligned}
$$

Komentarz

Poniżej omówione są zagadnienia, których niezrozumienie było najczęstszą przyczyną błędnego rozwiązania zadania.

Druga zasada dynamiki definiuje wypadkową siłę działającą na obiekt za pomocą zmiany jego pędu:

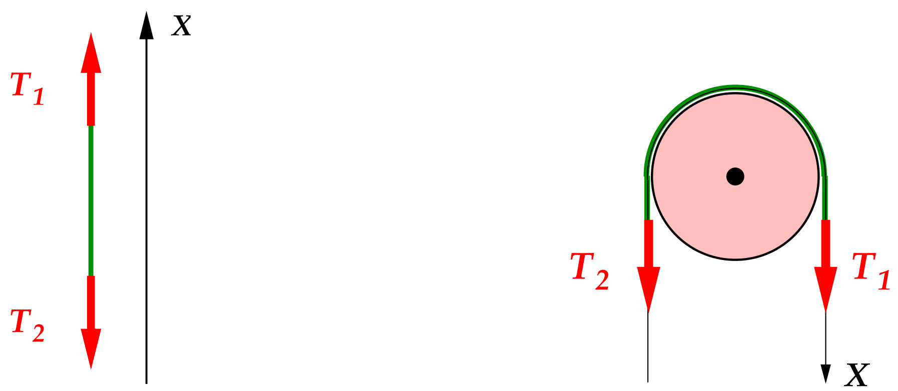
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

A więc w przypadku obiektów, których pęd nie zmienia się w czasie, otrzymujemy:

$$\vec{F} = 0$$

Takimi są w mechanice klasycznej na przykład obiekty bezmasowe, gdyż mają stały, zerowy pęd ($m = 0 \Rightarrow \vec{p} = m\vec{v} = 0$). Stąd bierze się np. równość siły naciągu na całej długości nieważkiej liny. W rozwiązaniach kolokwialnych pojawiało się wielokrotnie błędne stwierdzenie, że jest to wynikiem również nierozciągliwości liny. Nie jest to prawdą. Siła naciągu będzie taka sama na całej długości dla nieważkiej gumy, sprężyny itp. Równość ta jest spełniona również w nieinercjalnych układach, gdyż siły pozorne działające na obiekt są proporcjonalne do jego masy.

Istotne jest, czy na ciało nie działają styczne do kierunku jego ruchu siły, które nie znikają przy $m = 0$. Np. w przedstawionych dwóch przypadkach ruchu liny o masie m (bloczek jest nieważki i obraca się bez oporów lub lina przesuwa się po nim bez tarcia):



otrzymujemy takie samo równanie ruchu wzdłuż osi X,

$$ma = T_1 - T_2$$

a dla liny nieważkiej ($m = 0$) w obu przypadkach równość:

$$T_1 = T_2$$

W drugim przypadku na linę działa bloczek, ale w każdym jej punkcie tylko prostopadle do wybranej osi, wzdłuż której rozpatrujemy ruch.

Jak widać, powyższe rozważania są prawdziwe, a wyniki wiarygodne, jeśli problem jest dobrze określony, tzn. nie pojawiają się np. nieskończone przyśpieszenia.

28 Moment pędu punktu materialnego

Wychodząc z II zasady dynamiki $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, gdzie $\vec{p}$ jest pędem punktu materialnego, a $\vec{F}$ działającą na niego siłą, udowodnij, że obowiązuje równanie

$$\dot{\vec{J}} = \vec{M} \ ,$$

gdzie $\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$ (moment pędu), $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ (moment siły), a $\vec{r}$ jest wektorem położenia punktu materialnego.

Rozwiązanie

$$\vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

$$\vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{r} \times \dot{\vec{v}} m = (\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}})m = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{v})m = \dot{\vec{J}} ,$$

gdzie skorzystaliśmy z $\vec{v} \times \vec{v} = 0$.

29 Kamień na sznurku

Przymocowany do sznurka kamień rozkręciłeś tak, że w czasie 2 s zakreśla okrąg o promieniu 1 m. Sznurek można skracać, wyciągając go w punkcie zamocowania, czyli w środku okręgu, po jakim porusza się kamień. Jaki będzie okres obiegu kamienia po okręgu, jeśli promień okręgu zmniejszysz do 30 cm? Pomiń wpływ oddziaływań grawitacyjnych oraz oporów ruchu. Sprawdź jakościowe przewidywania w doświadczeniu.

30 Kometa Halleya *

Oblicz największą i najmniejszą wartość prędkości komety, jeśli najmniejsza i największa odległość od komety do Słońca równa jest odpowiednio d oraz D. Dane są masa Słońca M_S oraz stała grawitacji G. Uzyskaj również wyniki liczbowe, jeśli przyjmiemy $d = 9 \cdot 10^{10}$ m, $D = 5 \cdot 10^{12}$ m, $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg oraz $G = 7 \cdot 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}.

Rozwiązanie

Z zasady zachowania momentu pędu:

$$vd = VD$$

Z zasady zachowania energii:

$$v^2 - \frac{\alpha}{d} = V^2 - \frac{\alpha}{D} ,$$

gdzie $\alpha = 2GM_S$.

Po wstawieniu $V = \frac{d}{D}v$ z pierwszego równania do równania drugiego:

$$v^2(1 - (\frac{d}{D})^2) = \alpha(d^{-1} - D^{-1})$$

Ostatecznie:

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\alpha(d^{-1} - D^{-1})/(1 - (\frac{d}{D})^2)} \\ V &= \sqrt{\alpha(D^{-1} - d^{-1})/(1 - (\frac{D}{d})^2)} \end{aligned}$$

Wartości liczbowe:

$$\begin{aligned} v &\approx 55000 \text{ m/s} \\ V &\approx 1000 \text{ m/s} \end{aligned}$$

31 Wirujący pocisk

Pocisk składający się z dwóch ciężarków o masach m_1 i m_2, połączonych sztywnym, nieważkim prętem o długości D, wyrzucono pionowo do góry. Początkowa prędkość środka masy tego układu wynosiła v_0, a początkowa prędkość kątowa, z jaką układ obraca się względem osi przechodzącej przez środek jego masy i prostopadłej do pręta, była równa ω_0. Pocisk wiruje w płaszczyźnie zawierającej kierunek pionowy. Jaki jest maksymalny pionowy zasięg pocisku w tym rzucie, jeśli rozmiary ciężarków są zaniedbywalnie małe? Z jaką prędkością kątową będzie wirować pocisk, gdy osiągnie maksymalną wysokość? Uzyskać również wynik liczbowy w przypadku, gdy $v_0 = 60$ m/s, $\omega_0 = 2$ rad/s, $D = 4$ m, $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 4$ kg, $g = 10$ m/s^2.

Rozwiązanie

Ze względu na nieważkość pręta, siły, jakimi pręt działa na ciężarki, mają tę samą długość, kierunek oraz przeciwne zwroty. Równania ruchu:
$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = m_1\vec{g} + \vec{N}$
$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = m_2\vec{g} - \vec{N}$
Dzięki temu uzyskujemy równanie ruchu środka masy układu:
$M\ddot{\vec{R}} = M\vec{g}$,
gdzie $M = m_1 + m_2$ oraz $\vec{R} = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)/M$. A więc maksymalną wysokość, H, na jakiej znajdzie się środek ciężkości układu możemy wyznaczyć z równania:
$Mv_0^2/2 = MHg$
$H = v_0^2/(2g)$
W równaniach nie występuje prędkość kątowa, a więc energia ruchu obrotowego pozostaje stała. Innymi słowy: zmiana energii potencjalnej wpływa tylko na prędkość środka masy. Jeszcze inaczej: wirowanie pocisku nie zmienia jego energii potencjalnej. Dla dopełnienia formalności: względem środka masy moment pędu jest stały, gdyż moment siły znika, $\vec{r}_1' \times \vec{g}m_1 + \vec{r}_2' \times \vec{g}m_2 = (\vec{r}_1'm_1 + \vec{r}_2'm_2) \times \vec{g} = 0$, gdzie $\vec{r}_1'$, $\vec{r}_2'$ są wektorami położenia względem środka masy. Z każdego z tych wnioskowań wynika, że w ciągu całego ruchu pocisk wiruje ze stałą prędkością kątową ω_0.
Załóżmy, że $m_1 \leq m_2$. Położenie odważnika m_1 możemy zapisać:
$\vec{r}_1 = \vec{R} + (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)m_2/M$,
a więc odważnik m_1 znajduje się w odległości $|(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)m_2/M| = Dm_2/M$ od środka masy pocisku.
Ostatecznie maksymalny zasięg pionowy pocisku w tym rzucie, Z_p, wynosi:

$$Z_p = v_0^2/(2g) + Dm_2/M$$

W przypadku, gdy $v_0 = 60$ m/s, $D = 4$ m, $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 4$ kg, $g = 10$ m/s^2:

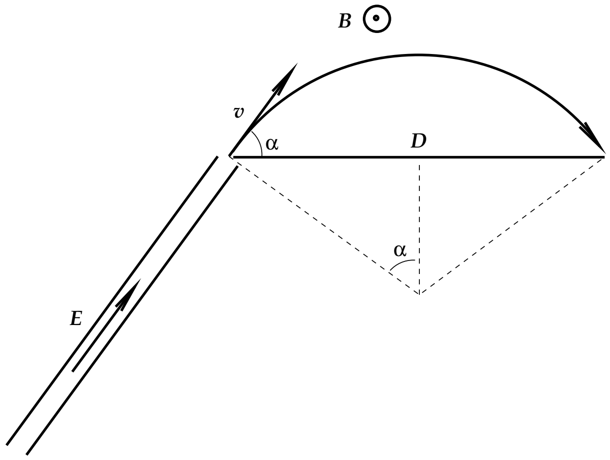
$$Z_p = v_0^2/(2g) + Dm_2/M = 180\,\mathrm{m} + 3.2\,\mathrm{m} = 183.2\,\mathrm{m}$$

32 Akcelerator, magnes i ekran

Początkowo spoczywającą cząstkę o dodatnim ładunku Q i masie m przyśpieszono za pomocą akceleratora o długości L. W akceleratorze wytwarzane jest jednorodne pole elektryczne E. Tuż za akceleratorem cząstka wleciała w obszar jednorodnego pola magnetycznego B. W jakiej odległości D od końca akceleratora cząstka uderzy w ekran? Kąt między osią akceleratora a płaszczyzną ekranu wynosi α. W wybranym układzie współrzędnych wektory pól są wyrażone następująco: $\vec{E} = E(\cos\alpha\hat{e}_x + \sin\alpha\hat{e}_y)$ i $\vec{B} = B\hat{e}_z$, równanie ekranu ma postać $y = 0$, a cząstka opuszczając akcelerator przelatuje przez początek układu współrzędnych.

Rozwiązanie

Układ eksperymentalny (rozwiązujący powinien sporządzić go na podstawie opisu):



W akceleratorze cząstka porusza się z przyśpieszeniem: $a = QE/m$. Na długości L uzyska prędkość $v = \sqrt{2QEL/m}$. W polu B będzie poruszać się po łuku o promieniu R wynikającym z równości: siła Lorentza = siła dośrodkowa, $mv^2/R = QvB$. A więc $R = mv/(QB)$.
Cząstka od wylotu z akceleratora do uderzenia w ekran będzie się poruszać po łuku o mierze kątowej 2α. Stąd $D = 2R\sin\alpha = 2\sin\alpha\sqrt{2ELm/Q}/B$

33 Liczba cząsteczek

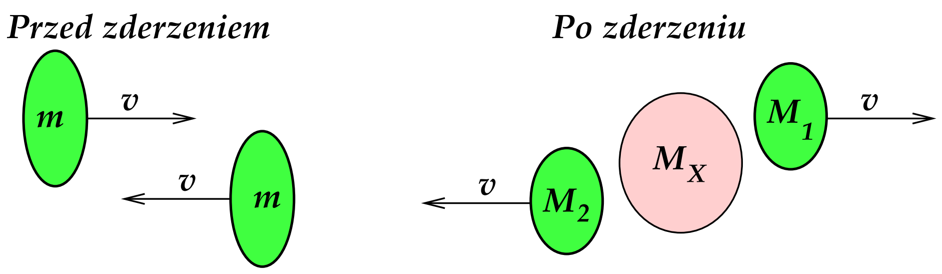
Objętość jednego mola wodoru w warunkach normalnych, czyli przy temperaturze 0°C i ciśnieniu 101325 Pa, wynosi około 22,4 dm^3. Oblicz, ile cząsteczek znajduje się w 1 μm^3 tego gazu. Liczba cząsteczek w jednym molu to około $6 \cdot 10^{23}$.

Fizyka relatywistyczna

W poniższych problemach należy uwzględniać efekty relatywistyczne.

34 Zderzenie dwóch jąder

Dwa jądra atomowe zbliżają się do siebie. Każde ma masę m i porusza się z prędkością v (kierunki prędkości są równoległe). Po zderzeniu obserwujemy dwa jądra o masach $M_1 = \frac{3}{4}m$ i $M_2 = \frac{1}{4}m$, które kontynuują ruch pierwotnych jąder (tzn. mają tę samą prędkość i kierunek co pierwotne jądra), oraz układ cząstek powstałych w zderzeniu, X. Obliczyć masę niezmienniczą układu X, M_X. Podać również wyrażenie na M_X w szczególnych przypadkach: a) $M_1 = M_2$ oraz b) $M_1 = M_2 = \frac{1}{2}m$.
Uwaga: Zastanowić się, jaki jest kierunek wektora pędu układu X. Pominąć efekty związane z budową jądra.



Rozwiązanie

Ze względu na zasadę zachowania pędu pęd układu X jest równoległy do wektora prędkości $\vec{v}$ – jest to problem jednowymiarowy. Jednostki: $c = 1$. Oznaczenia: $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$.

Sposób I „bezpośredni": Dodaję energie i pędy zderzających się fragmentów jąder

Energia: $E_X = \gamma(m - M_1) + \gamma(m - M_2)$.

Pęd: $P_X = v\gamma(m - M_1) - v\gamma(m - M_2)$.

Sposób II „pośredni": Odejmuję energie i pędy pozostałych fragmentów jąder od całkowitej energii i pędu

Energia przed zderzeniem: $E_{przed} = e + e$, gdzie $e = \gamma m$.

Energia po zderzeniu: $E_{po} = E_1 + E_2 + E_X$, gdzie $E_1 = \gamma M_1$ oraz $E_2 = \gamma M_2$.

Pęd przed zderzeniem: $p_{przed} = p_1 + p_2$, gdzie $p_1 = v\gamma m$ oraz $p_2 = -v\gamma m$.

Pęd po zderzeniu: $p_{po} = P_1 + P_2 + P_X$, gdzie $P_1 = v\gamma M_1$ oraz $P_2 = -v\gamma M_2$.

Z zasady zachowania energii, $E_{przed} = E_{po}$, otrzymuję $E_X = 2e - E_1 - E_2 = \gamma(2m - M_1 - M_2)$.

Z zasady zachowania pędu, $p_{przed} = p_{po}$, otrzymuję $P_X = p_1 + p_2 - P_1 - P_2 = v\gamma(-M_1 + M_2)$.

Odpowiedź

Masa niezmiennicza układu X wynosi

$$M_X = (E_X^2 - P_X^2)^{1/2} = \gamma[(2m - M_1 - M_2)^2 - v^2(M_1 - M_2)^2]^{1/2}.$$

Jeśli $M_1 = \frac{3}{4}m$ i $M_2 = \frac{1}{4}m$, to otrzymuję $M_X = \gamma m[1 - v^2/4]^{1/2}$.

a) Dla $M_1 = M_2$ otrzymuję $M_X = \gamma 2(m - M_1)$.

b) Dla $M_1 = M_2 = \frac{1}{2}m$ otrzymuję $M_X = \gamma m$.

35 Pomiar długości rakiety

Dwie rakiety A i B poruszają się w tym samym kierunku z prędkościami v_A i v_B w układzie związanym z nieruchomą gwiazdą. Długość rakiety A w jej układzie spoczynkowym wynosi L. Ile wynosi długość rakiety A w układzie związanym z rakietą B? Otrzymany wzór sprawdzić w szczególnych przypadkach: a) $v_B = 0$, b) $v_B = v_A$.

Rozwiązanie

Konwencja: $\textit{Wielkość}_{\textit{Obiekt}\text{ w }\textit{Układ}}$

G - nieruchoma gwiazda

Sposób I.

$L = \Delta x_{AwA} = \gamma_{AwG}(\Delta x_{AwG} - v_{AwG}\Delta t_{AwG})$

Chcemy $\Delta t_{AwB} = 0$, więc $\Delta x_{AwG} = \gamma_{BwG}\Delta x_{AwB}$ oraz $\Delta t_{AwG} = \gamma_{BwG}(v_{BwG}/c^2)\Delta x_{AwB}$.

$L = \Delta x_{AwA} = \gamma_{AwG}\gamma_{BwG}(1 - v_{AwG}v_{BwG}/c^2)\Delta x_{AwB}$, ale $\Delta x_{AwB} = L_{AwB}$ jest szukaną długością.

Długość rakiety A mierzona w układzie rakiety B wynosi ($v_{AwG} = v_A$, $v_{BwG} = v_B$, $\beta_X = v_X/c$):

$$L_{AwB} = L\sqrt{1-\beta_A^2}\sqrt{1-\beta_B^2}/(1-\beta_A\beta_B).$$

a) Jeśli $v_B = 0$, to $L_{AwB} = L\sqrt{1-\beta_A^2}$

b) Jeśli $v_B = v_A$, to $L_{AwB} = L$

Sposób II.

$v_{AwB} = (v_{AwG} - v_{BwG})/(1 - v_{AwG}v_{BwG}/c^2)$

$$L_{AwB} = L\sqrt{1-\beta_{AwB}^2} = L\sqrt{1-\beta_A^2}\sqrt{1-\beta_B^2}/(1-\beta_A\beta_B)$$

36 Rakieta i pocisk lub kapsuła

Wersja militarna:

Samolot leci z prędkością v_S. W odległości L od celu wystrzeliwuje pocisk, którego prędkość względem samolotu wynosi v'_P. Jaki interwał czasu T' należy ustawić na zapalniku czasowym umieszczonym w pocisku, aby eksplozja jego ładunku nastąpiła w chwili osiągnięcia celu? Wielkości L i v_S są mierzone względem nieruchomego układu związanego z celem ataku. Otrzymany wzór sprawdzić w szczególnym przypadku $v'_P = 0$.

Wersja cywilna:

Rakieta leci z prędkością v_S. W odległości L od morskiego brzegu, oddziela się od rakiety kapsuła, której prędkość względem rakiety wynosi v'_P. Kapsuła porusza się w tym samym kierunku co rakieta. Jaki interwał czasu T' należy ustawić automatycznemu pilotowi kapsuły, aby procedurę lądowania zainicjował już nad morzem? Wielkości L i v_S są mierzone względem nieruchomego układu związanego z brzegiem morza. Otrzymany wzór sprawdzić w szczególnym przypadku $v'_P = 0$.

Rozwiązanie

Sposób I.

Konwencja: $\textit{Wielkość}_{\textit{Obiekt}\text{ w }\textit{Układ}}$

S - samolot lub rakieta

P - pocisk lub kapsuła

Z - nieruchomy układ związany z brzegiem morza (np. Ziemia)

$L = \Delta x_{PwZ} = \gamma_{SwZ}(\Delta x_{PwS} + v_{SwZ}\Delta t_{PwS})$

Mamy $\Delta x_{PwP} = 0$, więc $\Delta x_{PwS} = \gamma_{PwS} v_{PwS} \Delta t_{PwP}$ oraz $\Delta t_{PwS} = \gamma_{PwS}\Delta t_{PwP}$.

$L = \Delta x_{PwZ} = \gamma_{SwZ}\gamma_{PwS}(v_{PwS} + v_{SwZ})\Delta t_{PwP}$, ale $\Delta t_{PwP} = T'$ jest szukanym interwałem czasu.

Automatycznemu pilotowi kapsuły należy ustawić interwał czasu ($v_{SwZ} = v_S$, $v_{PwS} = v'_P$, $\beta_S = v_S/c$, $\beta'_P = v'_P/c$):

$$T' = \Delta t_{PwP} = L\sqrt{1-\beta_S^2}\sqrt{1-\beta_P'^2}/(v_S + v'_P).$$

Jeśli $v'_P = 0$, to $T' = \Delta t_{PwP} = L\sqrt{1-\beta_S^2}/v_S$.

Sposób II.

$v_{PwZ} = (v_{SwZ} + v_{PwS})/(1 + v_{SwZ}v_{PwS}/c^2)$

$T' = \Delta t_{PwP} = \Delta t_{PwZ}\sqrt{1-\beta_{PwZ}^2}$

Czas przelotu pocisku w układzie Z: $\Delta t_{PwZ} = L/v_{PwZ}$.

$\sqrt{1-\beta_{PwZ}^2} = \sqrt{1-\beta_{SwZ}^2}\sqrt{1-\beta_{PwS}^2}/(1 + \beta_{SwZ}\beta_{PwS})$

$$T' = \Delta t_{PwP} = L\sqrt{1-\beta_S^2}\sqrt{1-\beta_P'^2}/(v_S + v'_P).$$

37 Awaria rakiety i wyprawa ratunkowa

Z Ziemi wyrusza rakieta lecąca z prędkością $c/2$. Po 10 dniach rakieta ulega awarii (10 dni wg pokładowego zegara). Załoga wysyła sygnał świetlny z prośbą o pomoc. Po otrzymaniu wiadomości centrum lotów na Ziemi natychmiast wysyła rakietę ratunkową. Z jaką szybkością v powinna się ona poruszać względem Ziemi, aby uratować załogę pierwszej z rakiet, w której astronauci mogą utrzymać się przy życiu przez 30 dni od awarii?

Rozwiązanie

Konwencja: $\textit{Wielkość}_{\textit{Obiekt/Wydarzenie} \text{ w } \textit{Układ}}$

Z - Ziemia

R - pierwsza rakieta

A - awaria R

I - dotarcie informacji

C - czekanie na pomoc

P - druga rakieta („Pomoc”)

S - spotkanie R i P

Dane: $v_{RwZ} = c/2$; $t_{AwR} = 10$ dni; $\Delta t_{CwR} = 30$ dni

Szukamy v_{PwZ}.

$$v_{PwZ} = \frac{x_{SwZ}}{\Delta t_{PwZ}}$$

Przejście z układu *R* do *Z*: $x_{SwZ} = \gamma_{RwZ}(x_{SwR} + v_{RwZ} t_{SwR})$. Ale $x_{SwR} = x_{RwR} = 0$, więc: $x_{SwZ} = \gamma_{RwZ} v_{RwZ} t_{SwR}$.

Wiemy, że $t_{SwR} = t_{AwR} + \Delta t_{CwR}$. Obliczyliśmy więc x_{SwZ}.

Obliczmy Δt_{PwZ}, czyli czas lotu *P*.

$x_{AwZ} = \gamma_{RwZ}(x_{AwR} + v_{RwZ} t_{AwR})$

Ale $x_{AwR} = x_{RwR} = 0$. Tak więc $x_{AwZ} = \gamma_{RwZ} v_{RwZ} t_{AwR}$.

Można już obliczyć czas Δt_{IwZ} potrzebny na dotarcie wezwania z miejsca *A* do *Z* w układzie *Z*: $\Delta t_{IwZ} = x_{AwZ}/c$.

Okres oczekiwania w układzie *Z*: $\Delta t_{CwZ} = \gamma_{RwZ}(\Delta t_{CwR} + v_{RwZ} \Delta x_{CwR}/c^2)$. Ale $\Delta x_{CwR} = \Delta x_{RwR} = 0$.

Ostatecznie:

$$\Delta t_{PwZ} = \Delta t_{CwZ} - \Delta t_{IwZ} = \gamma_{RwZ}(\Delta t_{CwR} - v_{RwZ} t_{AwR}/c)$$

$$v_{PwZ} = \frac{x_{SwZ}}{\Delta t_{PwZ}} = \frac{v_{RwZ}(t_{AwR} + \Delta t_{CwR})}{\Delta t_{CwR} - v_{RwZ} t_{AwR}/c}$$

Podstawiając wartości otrzymujemy odpowiedź:

$$v_{PwZ} = c/2 \frac{10 + 30}{30 - 10/2} = \frac{4}{5} c$$